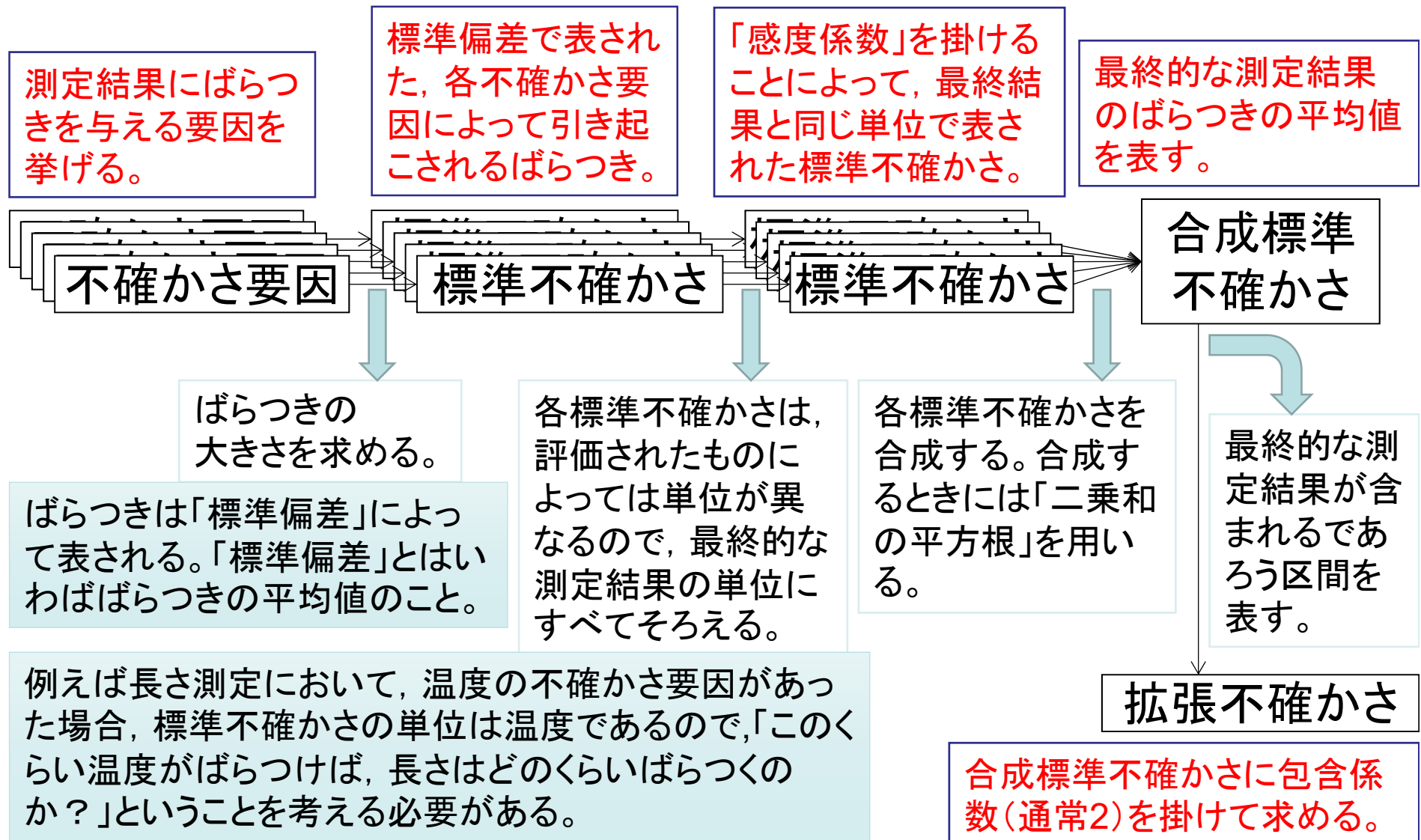


モデル式を用いた不確かさ評価方法

産業技術総合研究所 計量標準総合センター
田中秀幸

不確かさの求め方（初心者）



例

- ある居酒屋で出されるビールジョッキにはここまで入れるというラインが付いている。そのラインまでの量をメスシリンダーで10回測定しその平均値をその居酒屋で出される大ジョッキの体積とする。
- また、測定時の温度は5 °Cで行う。

この例を用いて、不確かさの算出について考える。

例：不確かさの要因の特定

- 測定の繰返し性： u_R
- 標準器の校正の不確かさ(メスシリンダーの校正の不確かさ)： u_S
- 温度による効果： u_t
- 体膨張係数の不確かさ等その他の不確かさ要因は影響が小さいので無視する。

例：タイプA評価

- メスシリンダーでビールジョッキに入れられた液体の体積を繰返し測定を行い次のデータを得た。

1	2	3	4	5
632	629	639	635	627
6	7	8	9	10回目
636	633	637	634	633

(単位:mL)

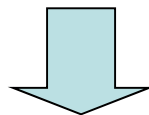
平均値: 633.5 mL

実験標準偏差: 3.598 mL

平均値の実験標準偏差: $u_R = 1.138$ mL

例：タイプBの不確かさ

- 標準器の校正の不確かさに相当する，メスシリンダーの校正の不確かさは，校正証明書より3.0 mL。



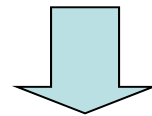
校正証明書を用いる場合，確率分布は正規分布である。

校正証明書にある不確かさを2で割ることにより標準偏差（標準不確かさ）が求められる。

$$u_s = \frac{3.0}{2} = 1.5 \text{ mL}$$

例：タイプBの不確かさ

- 温度による効果は、温度を測定している温度計が最小目盛り1 °Cのデジタル温度計を用いているため、 ± 0.5 °Cで温度が分からない。



± 0.5 °Cの範囲内では、どこでも同じ確率で現れるので、矩形分布を仮定

温度による効果は、矩形分布を仮定しているので、分布の半幅を $\sqrt{3}$ で割ることにより標準偏差が求められる。

$$u_t = \frac{0.5}{\sqrt{3}} = 0.2887 \text{ } ^\circ\text{C}$$

例：感度係数

- この液体の体膨張率・・・ $5.23 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
- この液体の体積・・・633.5 mL

このとき、液体の温度を体積に変換するための感度係数は、

$$\begin{aligned}\text{体膨張率} \times \text{体積} &= 5.23 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \times 633.5 \text{ ml} \\ &= 3.313 \text{ mL/}^{\circ}\text{C} \\ &\text{感度係数}\end{aligned}$$

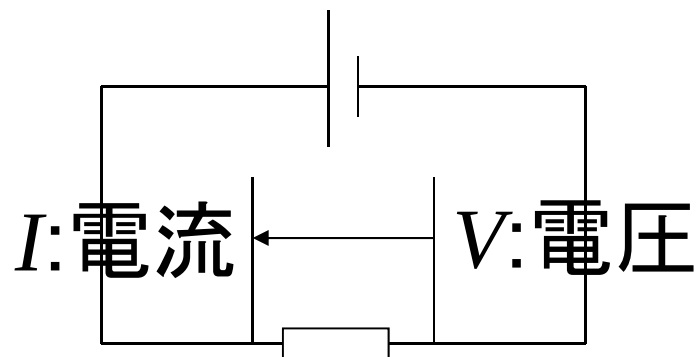
例：不確かさの合成・拡張 バジェットシート

記号	不確かさ要因	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ (出力量の単位)	備考
u_R	測定の 繰返し性	1.138 mL	1	1.138 mL	繰返し回数は10回
u_S	標準器の校正 の不確かさ	1.5 mL	1	1.5 mL	メスシリンダーの校正 証明書より
u_t	温度による 効果	0.2887 °C	3.313 mL/°C	0.9565 mL	温度計のデジタル表 示の不確かさ。 分解能1°C
u_c	合成標準不確か さ			2.112 mL	
U	拡張不確かさ			4.2 mL	包含係数は $k=2$

ビールジョッキの体積
633.5 mL ± 4.2 mL, $k=2$

なぜこの評価法はダメなのか

- 簡単な事例では、感度係数は先ほど説明したような方法で求まるが、複雑な測定では、感度係数が求まらないことがある。

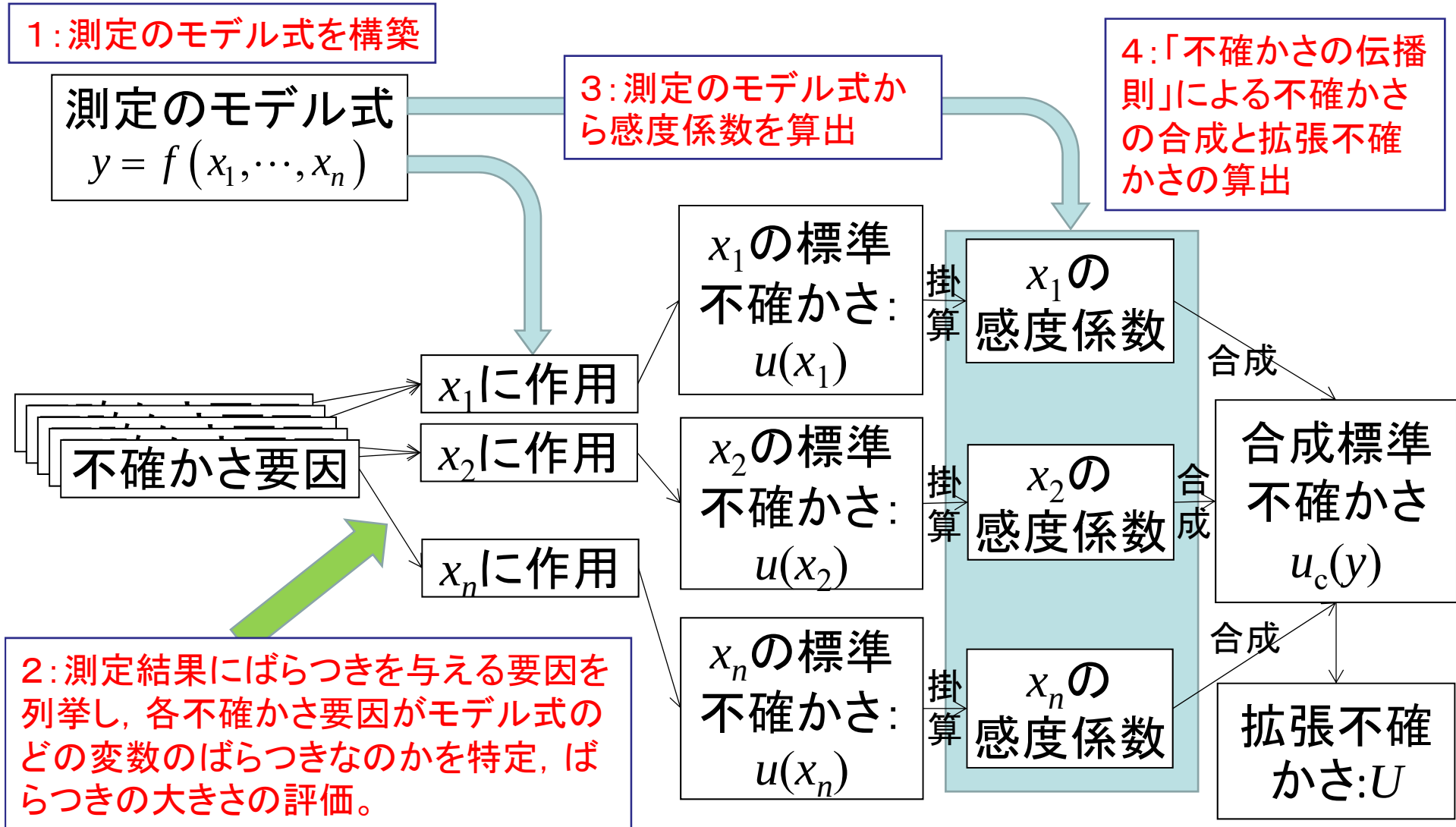


抵抗 R と電圧 V から電流 I を求める測定において、抵抗が不確かさを持つ場合、抵抗を電流に変換する感度係数は？

$$R:抵抗 \quad I = \frac{V}{R}$$

モデル式を用いた評価は、この場合でも対応できる。

不確かさの求め方(モデル式利用)



測定モデル式とは？

- 測定モデル式とは、測定結果を算出するときに用いる、測定された値と、測定結果の間の関係を数式で表わしたもの。

例えば、

棒の長さをものさしで測定する。

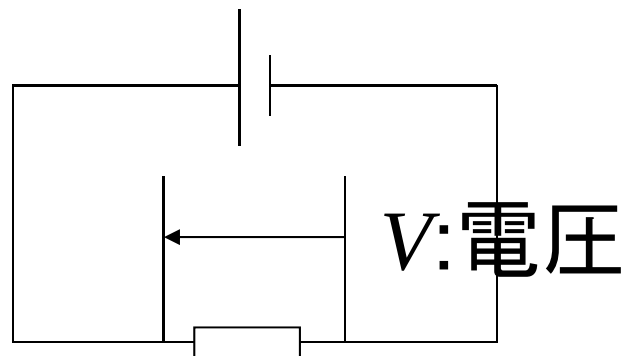
この場合は、ものさしの指示値がそのまま棒の長さであると考えられるので、

$$L = r$$

L : 棒の長さ
 r : ものさしの指示値 となる。

測定モデル式とは？

抵抗に流れている電流を求める。



R :抵抗

電流を I とすると,

モデル式

$$I = \frac{V}{R}$$

例：モデル式

- ある居酒屋で出されるビールジョッキにはここまで入れるというラインが付いている。そのラインまでの量をメスシリンダーで10回測定しその平均値をその居酒屋で出される大ジョッキの体積とする。
- また、測定時の温度は5 °Cで行う。

$$V = x - \alpha x(t - 5)$$

V : ビールジョッキの体積(mL)

x : メスシリンダーの読み値 (mL)

t : 測定時の温度(°C)

α : 用いる液体の体膨張係数(°C⁻¹)

不確かさ要因

- ・ 不確かさ要因はどのようにして決定すればよいのでしょうか？

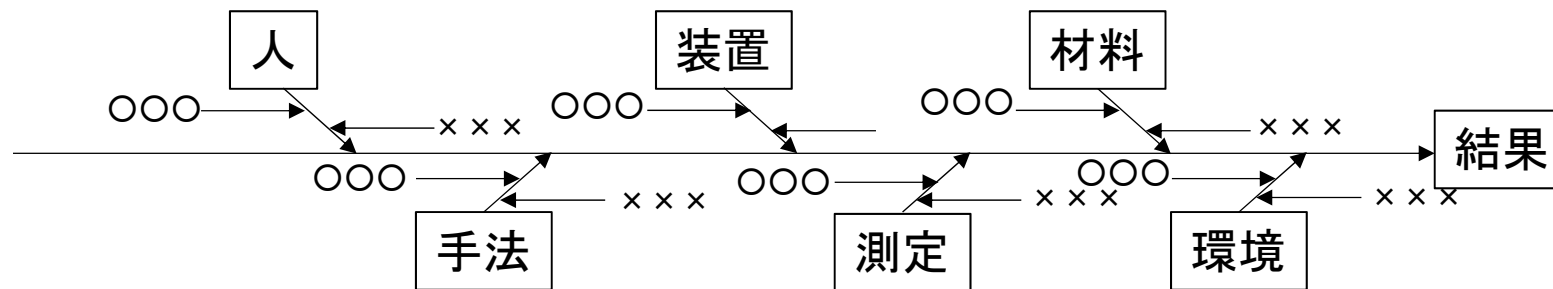
最も基本的な方法→特性要因図

特性要因図とは・・・QC7つ道具の一つ。ばらつきを与える要因を図示することによって分かりやすくする。フィッシュボーンダイアグラム, フィッシュボーンチャート, 魚の骨図, イシカワダイアグラムなど, 様々な呼び方がある。

不確かさ評価用特性要因図

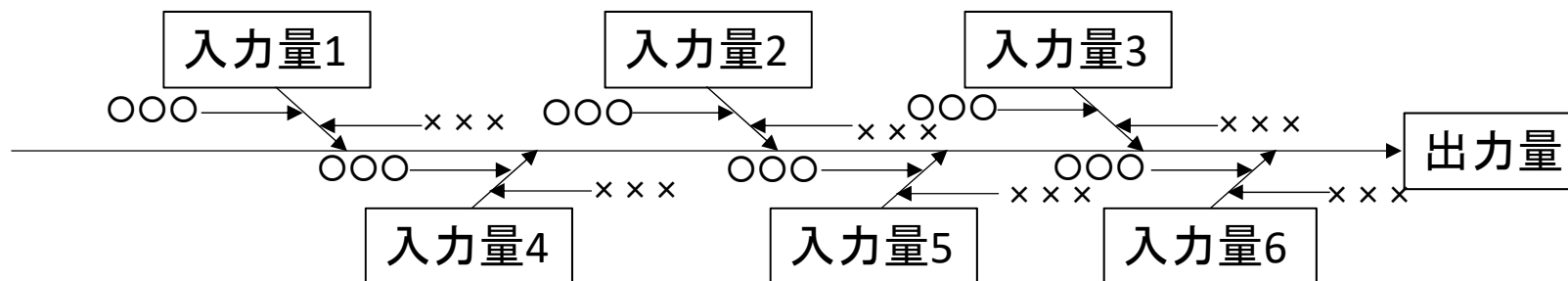
通常の特性要因図

→5M+1E (Man, Machine, Material, Method, Measurement, Environment) についてまとめる。



不確かさ評価用特性要因図

→入力量・出力量についてまとめる。

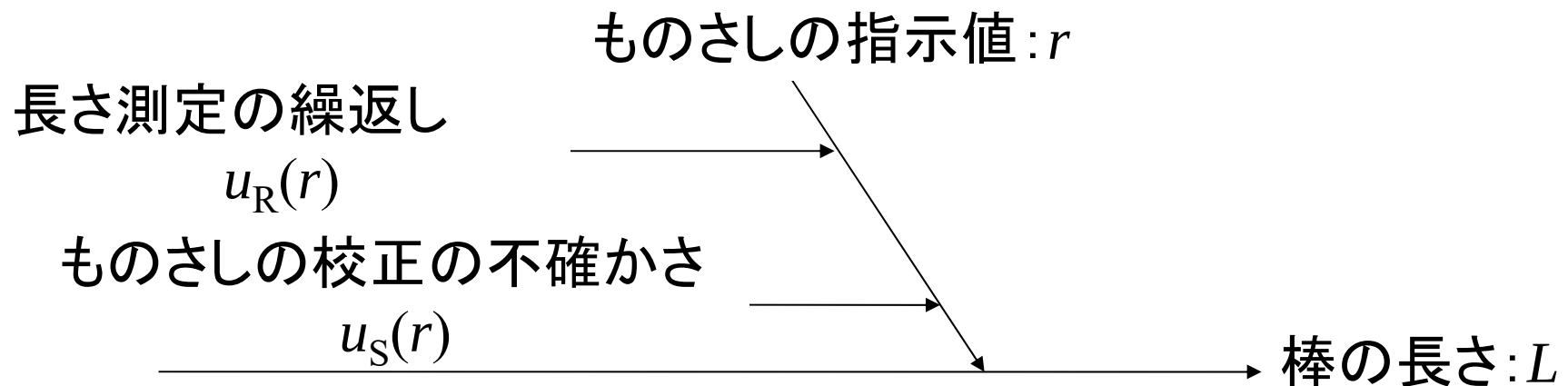


不確かさの要因を考える

棒の長さをものさしで測定する。

$$L = r$$

L : 棒の長さ
 r : ものさしの指示値



変数の文字の付け方

棒の長さをものさしで測定する。

モデル式 $L = r$

不確かさ要因

- ・測定の手返し: $u_R(r)$

- ・ものさしの校正の不確かさ: $u_S(r)$



両方とも
 r に作用する。

標準不確かさは $u()$ で表す。括弧の中には、その不確かさ要因が影響している変数を入れる。複数の不確かさ要因が同じ変数に影響を与えるときには、 u に添え字を付け、区別する。

それぞれの変数の不確かさを求める

棒の長さをものさしで測定する。

モデル式 $L = r$

不確かさ要因

- ・測定の繰返し: $u_R(r)$
- ・ものさしの校正の不確かさ: $u_S(r)$



両方とも
 r に作用する。

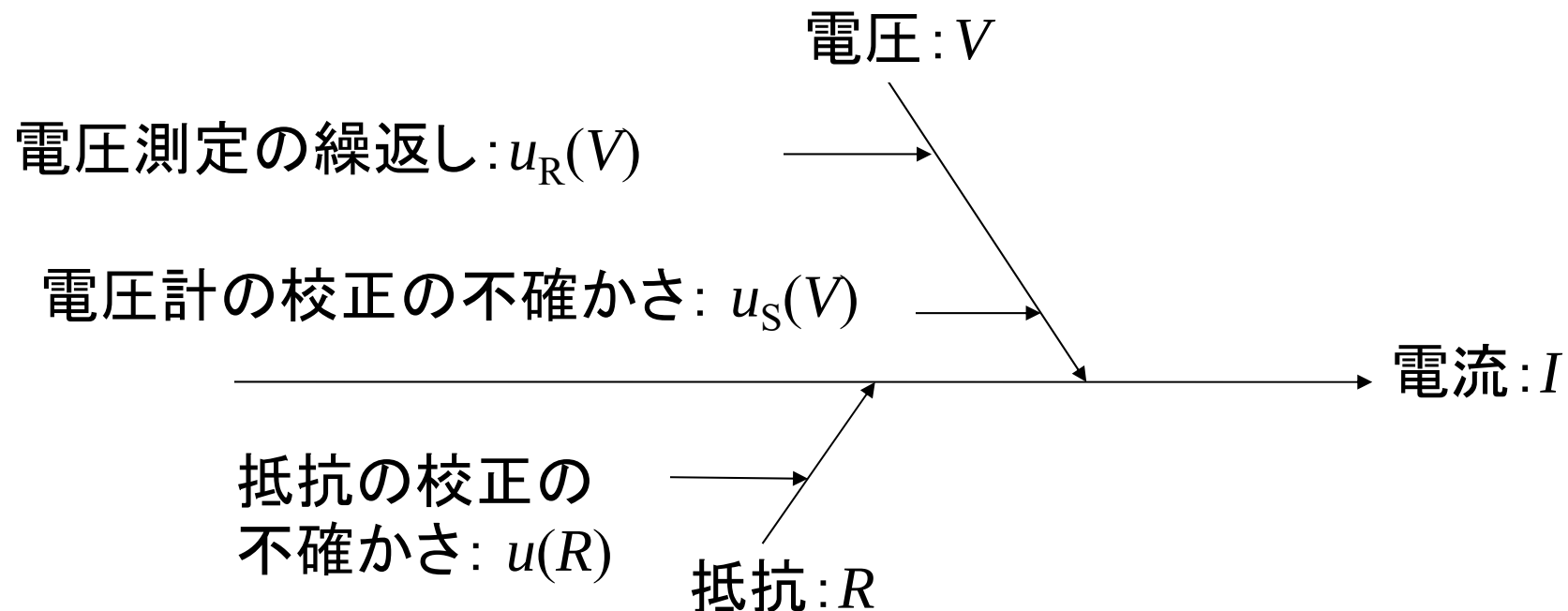
$$u(r) = \sqrt{u_R^2(r) + u_S^2(r)}$$

不確かさの要因を考える

抵抗に流れている電流を求める。

モデル式

$$I = \frac{V}{R}$$



それぞれの変数の不確かさを求める
抵抗に流れている電流を求める。

モデル式
$$I = \frac{V}{R}$$

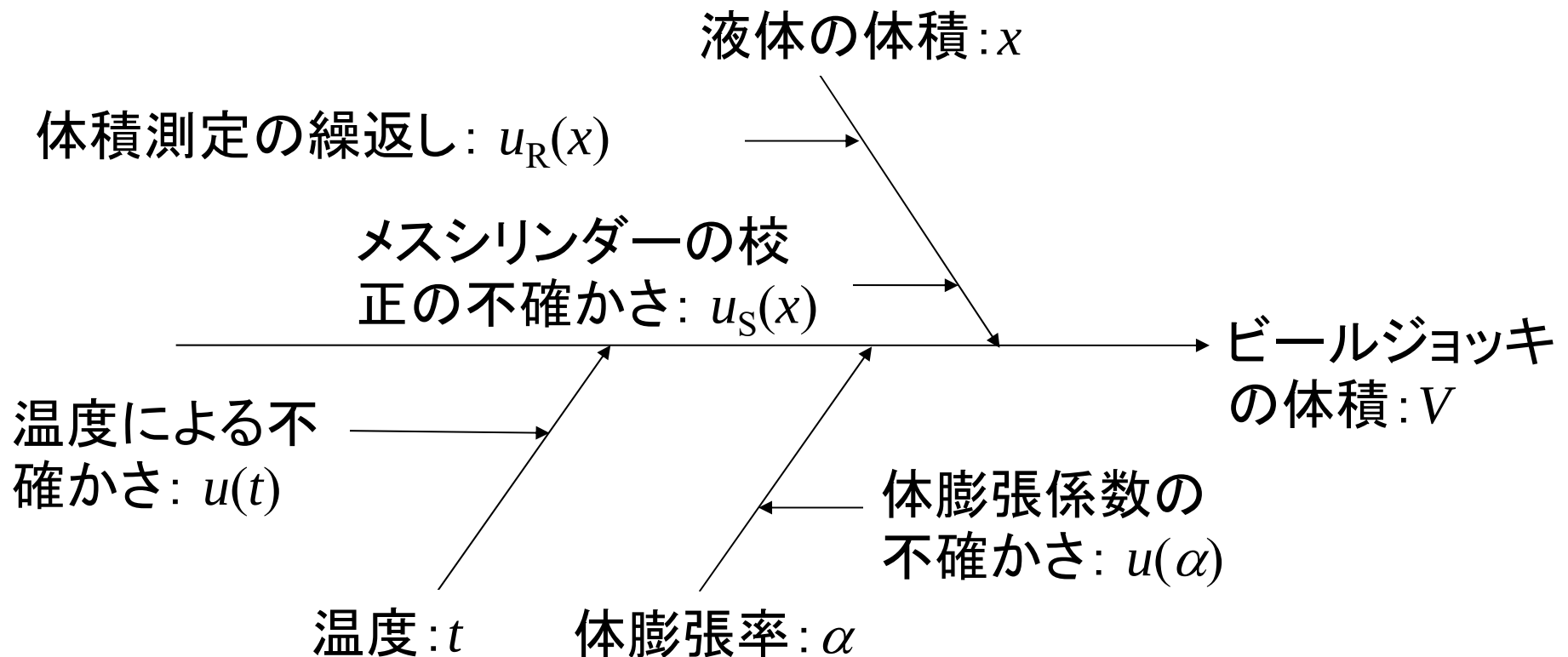
不確かさ要因

- ・電圧測定の繰返し: $u_R(V) \cdots V$
- ・電圧計の校正の不確かさ: $u_S(V) \cdots V$
- ・抵抗の校正の不確かさ: $u(R) \cdots R$

$$u(V) = \sqrt{u_R^2(V) + u_S^2(V)} \quad u(R)$$

例：不確かさの要因を考える

- モデル式 $V = x - \alpha x(t - 5)$



例：それぞれの変数の不確かさを求める

モデル式 $V = x - \alpha x(t - 5)$

メスシリンダーの読み値の不確かさ

$$u(x) = \sqrt{u_R^2(x) + u_S^2(x)} = \sqrt{1.138^2 + 1.5^2} = 1.883 \text{ mL}$$

温度による不確かさ

$$u(t) = 0.2887 \text{ } ^\circ\text{C}$$

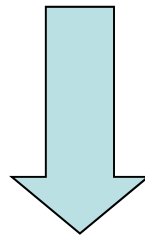
体膨張係数の不確かさ

$$u(\alpha) \approx 0$$

感度係数

今まで行ってきたことで、各変数の不確かさの大きさを求めることができた。

次にこの各変数の単位が出力量の単位と同じでないものがあるため、それぞれを出力量の単位に変換する。

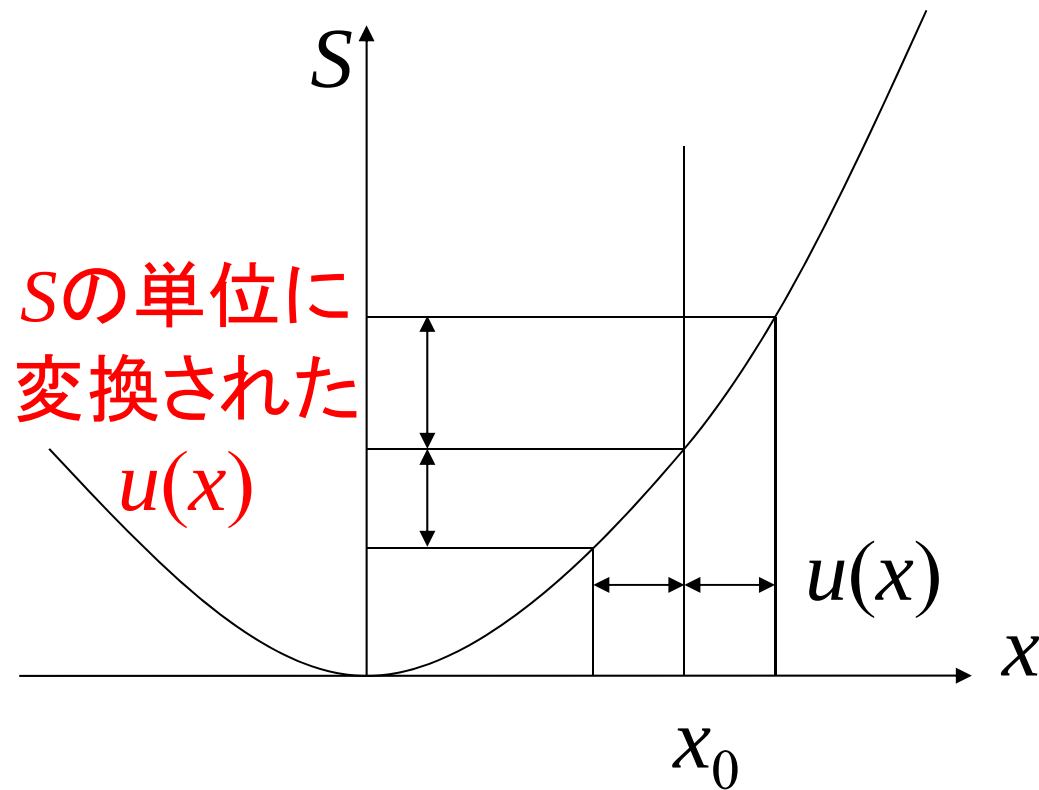


感度係数を用いる。

感度係数

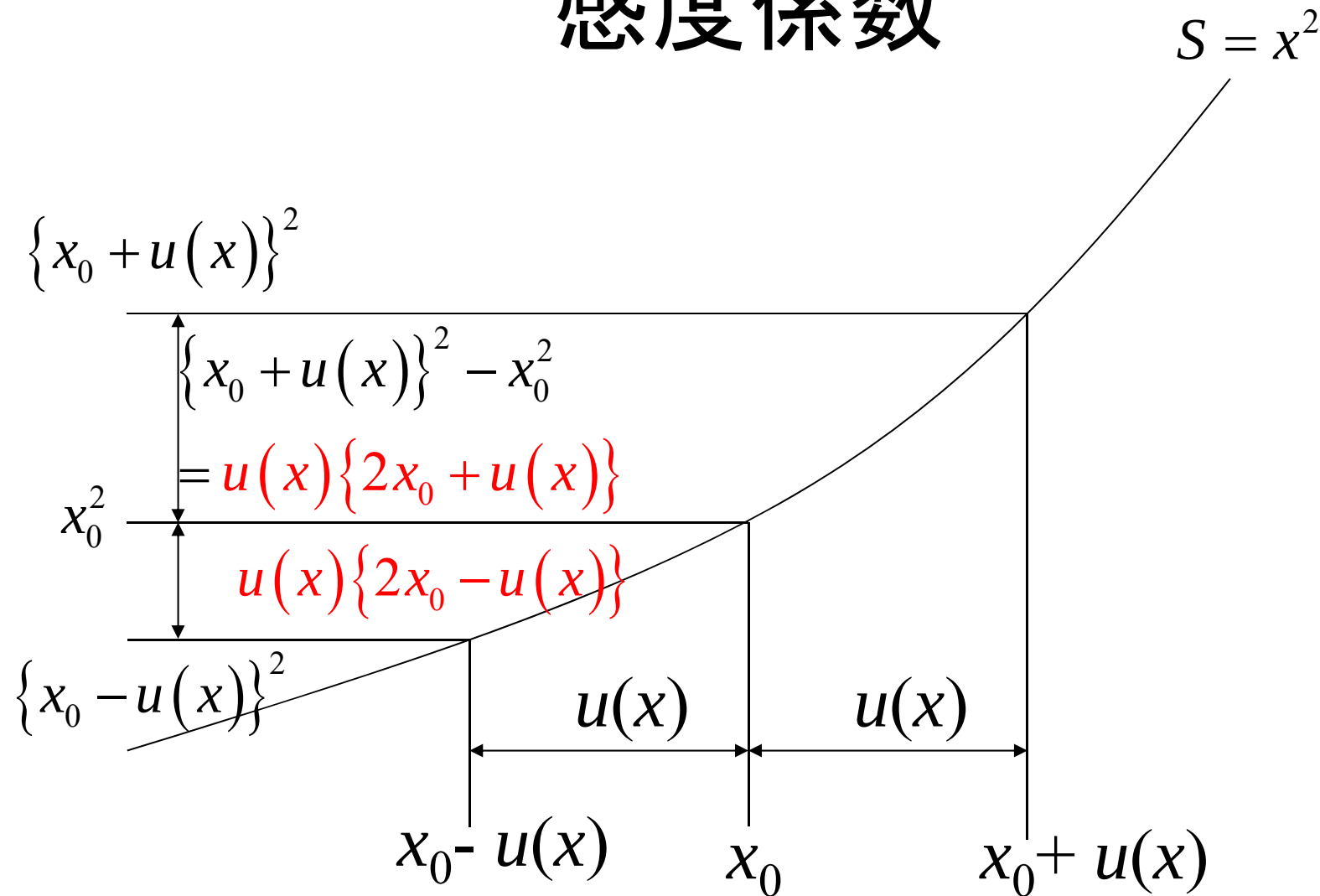
1辺の長さが x である正方形の面積 S

モデル式 $S = x^2$



これをどうやって
求めるのか？

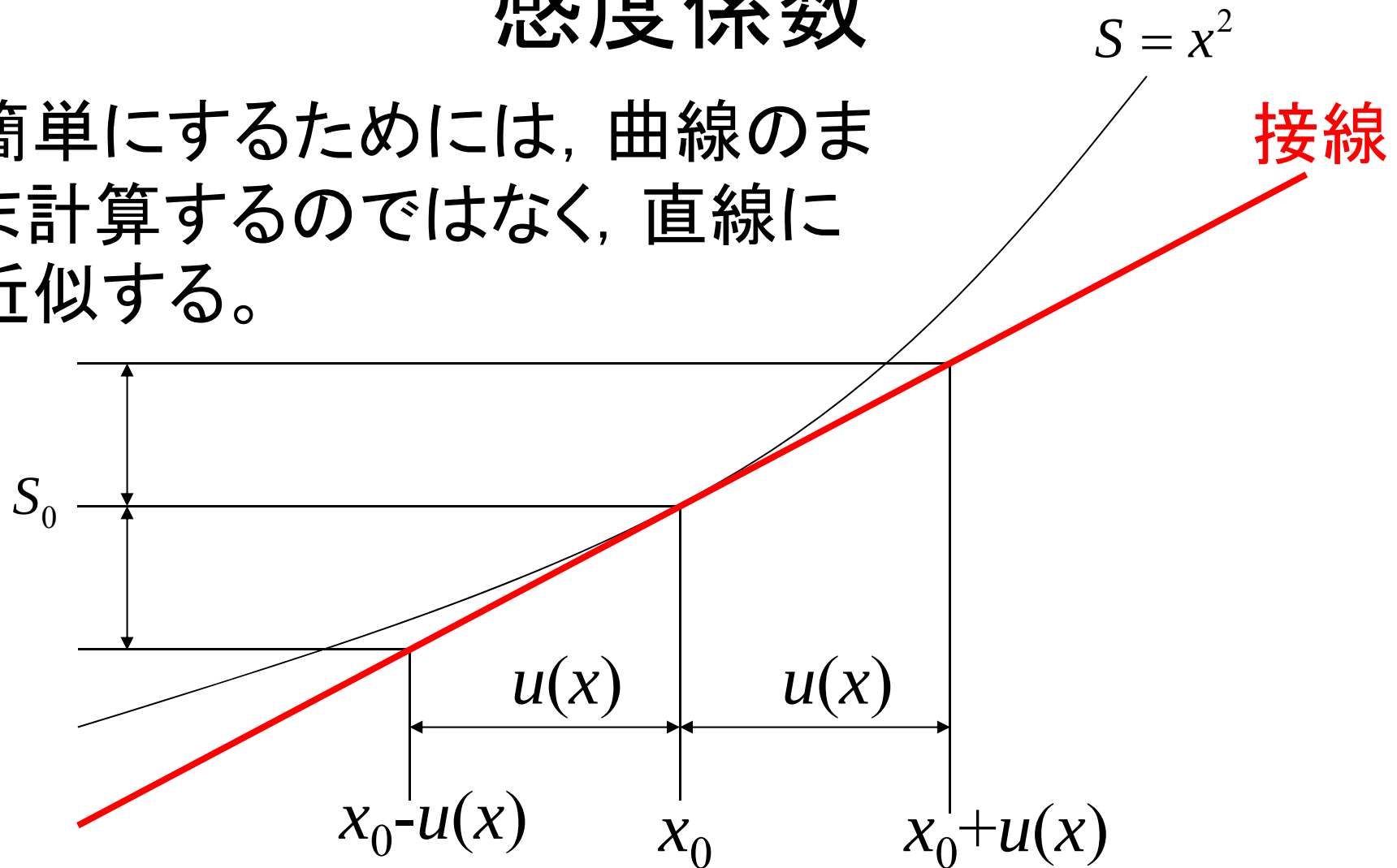
感度係数



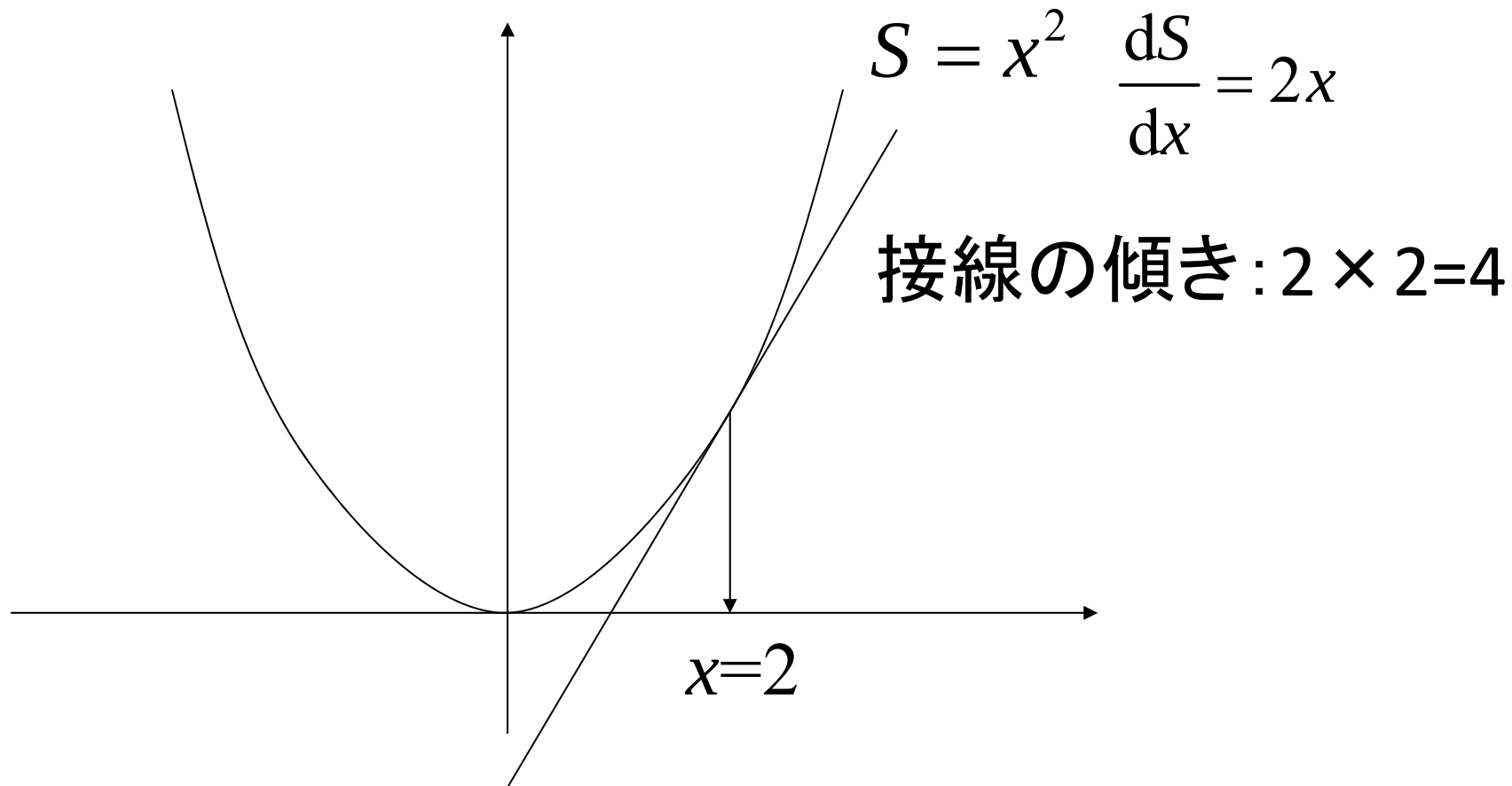
これでは、モデル式が複雑になると対応できない

感度係数

簡単にするためには、曲線のまま計算するのではなく、直線に近似する。



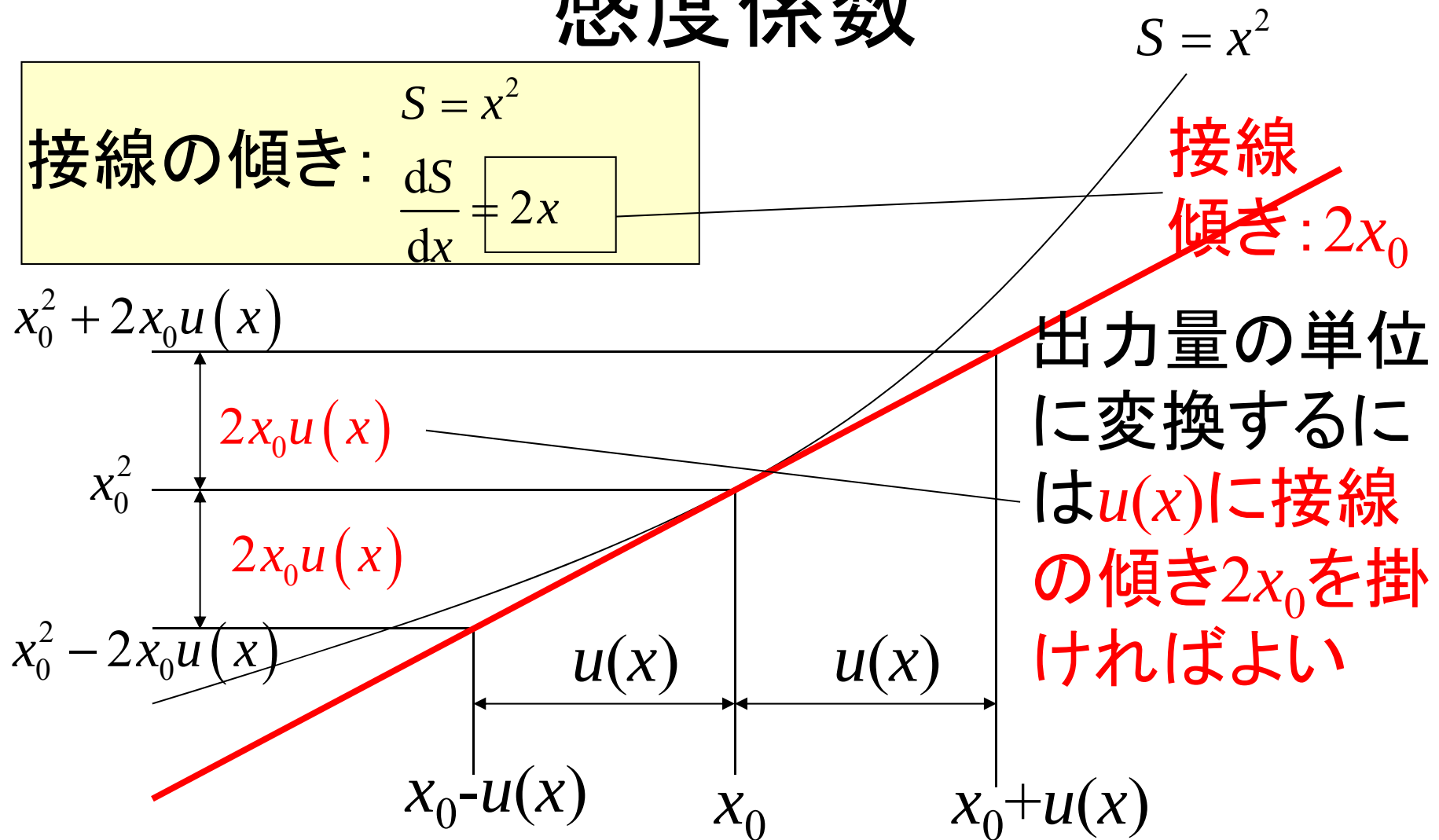
接線の傾きの求め方



$x=2$ での接線の傾きは, $2x$ の x に2を代入して4となる

感度係数

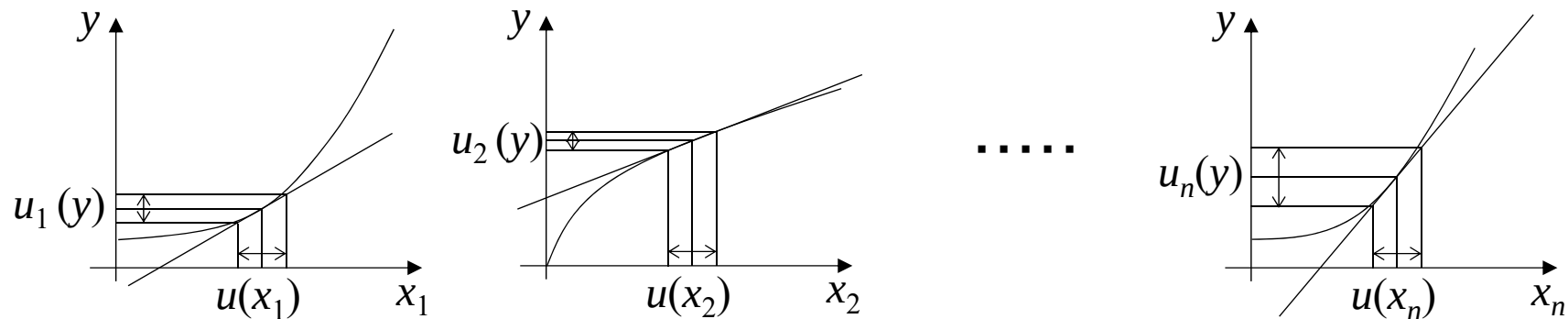
接線の傾き: $S = x^2$
 $\frac{dS}{dx} = 2x$



非常に簡単に出力量の単位に変換できた。

多変数に拡張

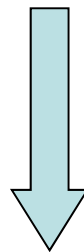
実際の測定においては、入力量が1つではなく、複数存在する。



よって、各入力量と出力量の間の微分を考える必要がある。

偏微分

偏微分とは、先ほどのように変数が x 一つではなく複数の変数が含まれた関数に対する微分である。



偏微分を行うときには、単にその偏微分を行う変数以外の文字を定数だと考えて行えばよい。

偏微分の例

関数 $f(x, y, z) = xyz$ において, x, y, z それぞれについて偏微分を行う。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

関数 $f(x, y, z) = \frac{x}{y^2} + 3z$ において, x, y, z それぞれについて偏微分を行う。

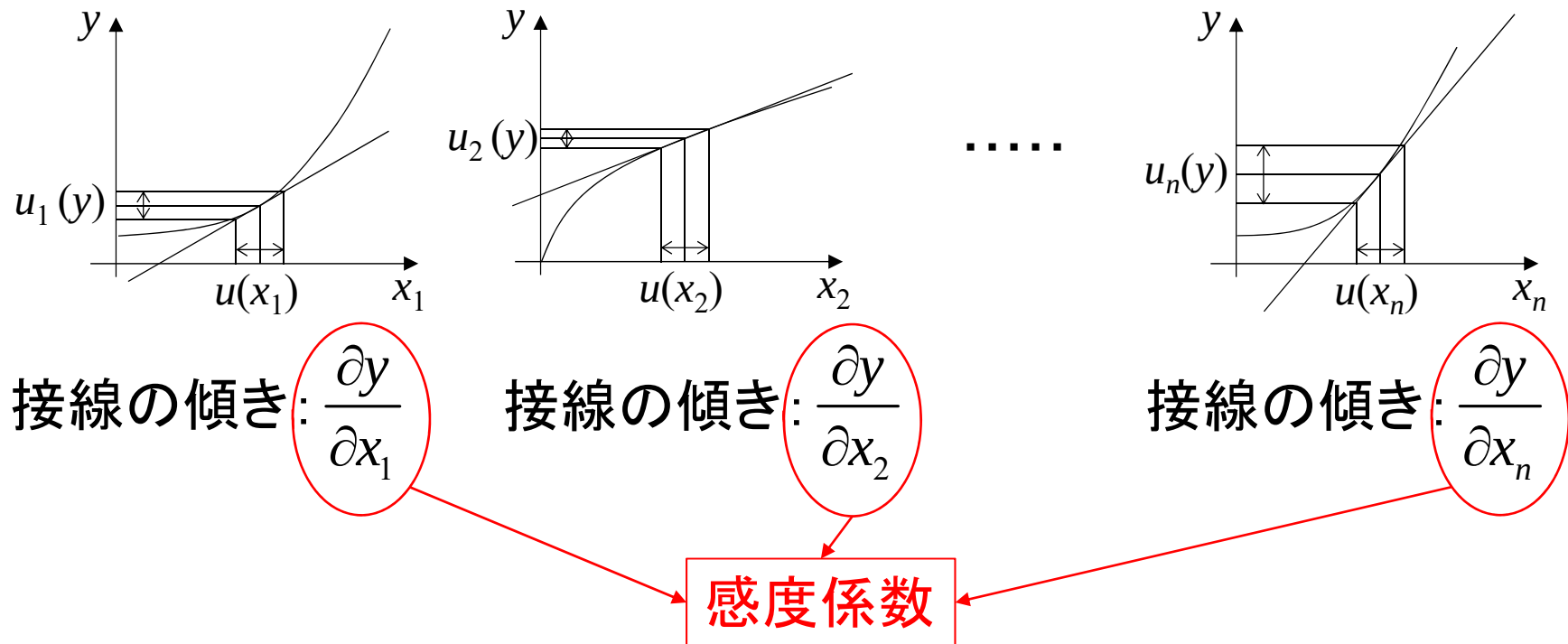
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3$$

多変数に拡張

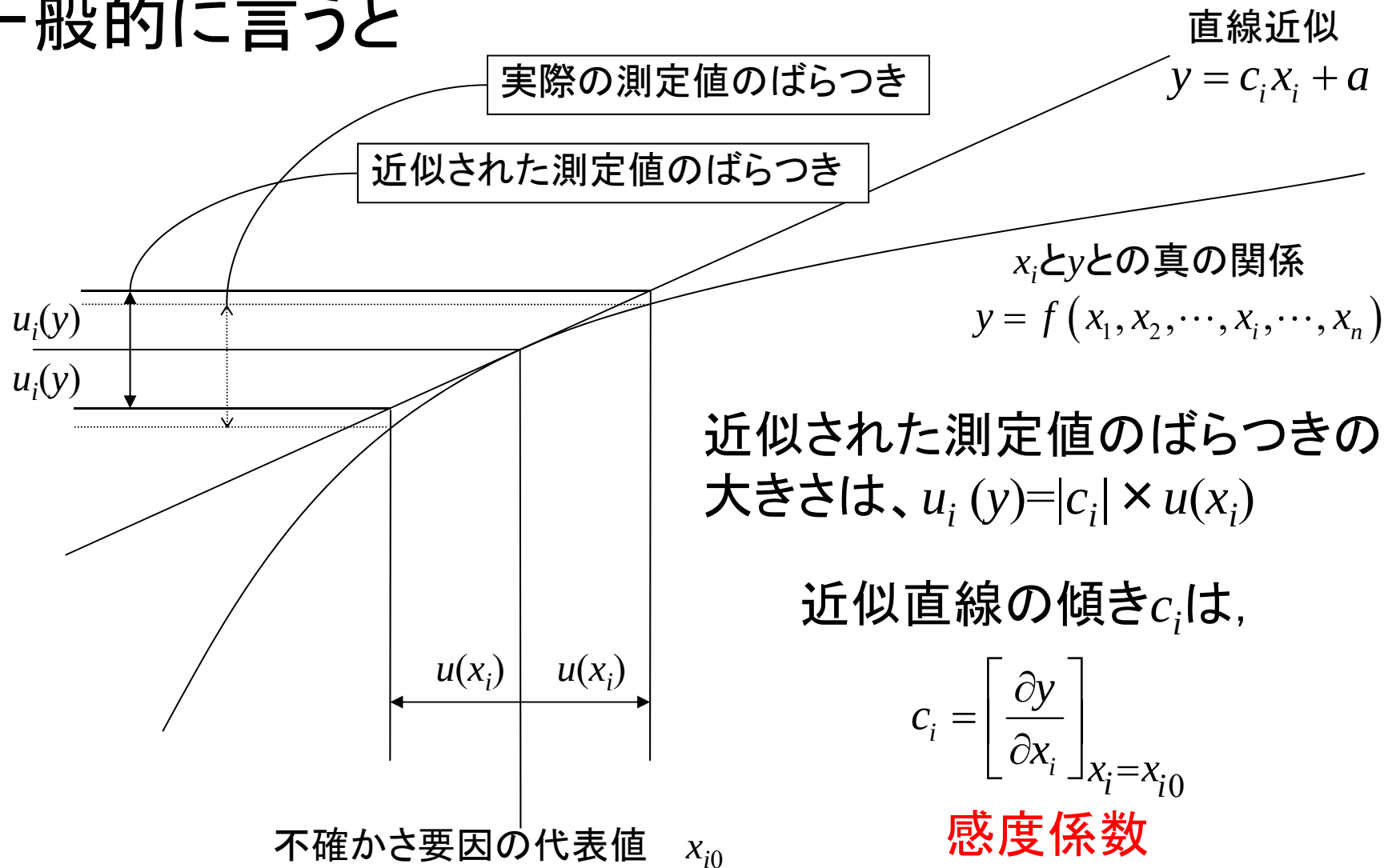
実際の測定においては，入力量が1つではなく，複数存在する。



これで，各入力量の感度係数を求めることができた。

感度係数

一般的に言うと



不確かさの合成法

感度係数によって、各不確かさの単位はすべて出力量の単位に変換されている。

単位がそろえられた不確かさを合成するときには二乗和の平方根を用いる。この合成された不確かさのことを合成標準不確かさと呼び、 u_c で表す。

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots}$$

不確かさの伝播則

今まで学んだことを一般的な式で表わすと,
モデル式を $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ とすると,

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i)$$

となる。この式のことを**不確かさの伝播則**と呼ぶ。

不確かさを合成するときはこの式を用いる。

不確かさの伝播則

棒の長さをものさしで測定する。

モデル式 $L = r$

不確かさの伝播則を適用すると,

$$u_c^2(L) = \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)^2 u^2(r) = u^2(r)$$

不確かさの伝播則

抵抗に流れている電流を求める。

モデル式
$$I = \frac{V}{R}$$

不確かさの伝播則を適用すると,

$$\begin{aligned} u_c^2(I) &= \left(\frac{\partial I}{\partial V} \right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial I}{\partial R} \right)^2 u^2(R) \\ &= \left(\frac{1}{R} \right)^2 u^2(V) + \left(-\frac{V}{R^2} \right)^2 u^2(R) \end{aligned}$$

例：不確かさの伝播則

$$\text{モデル式 } V = x - \alpha x(t - 5)$$

$$u_c^2(V) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 u^2(x) + \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]^2 u^2(t) + \left[\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right]^2 u^2(\alpha)$$

体膨張率の不確かさは無視できるので,

$$\begin{aligned} u_c^2(V) &= \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 u^2(x) + \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]^2 u^2(t) \\ &= [1 - \alpha(t - 5)]^2 u^2(x) + [-\alpha x]^2 u^2(t) \end{aligned}$$

ここで,

$$u^2(x) = u_R^2(x) + u_S^2(x)$$

例：合成標準不確かさの算出

$$\begin{aligned}
 u^2(x) &= u_R^2(x) + u_S^2(x) \\
 &= 1.138^2 + 1.5^2 & u(x) &= 1.883 \text{ mL} \\
 &= 3.545
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_c^2(V) &= \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 u^2(x) + \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]^2 u^2(t) \\
 &= 1^2 \times 3.545 + (-3.313)^2 \times 0.2887^2 \\
 &= 4.460
 \end{aligned}$$

$$u_c(V) = 2.112$$

例：最終結果

記号	不確かさ要因	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ (出力量の単位)	備考
$u(x)$	読み値の不確かさ	1.883 mL	1	1.883 mL	$u_R(x)$ と $u_S(x)$ を合成したもの
$u_R(x)$	測定の繰返し性	1.138 mL	1	1.138 mL	繰返し回数は10回
$u_S(x)$	標準器の校正の不確かさ	1.5 mL	1	1.5 mL	メスシリンダーの校正証明書より
$u(t)$	温度による効果	0.2887 °C	-3.313 mL/°C	0.9565 mL	温度計のデジタル表示の不確かさ。 分解能1°C
$u_c(V)$	合成標準不確かさ			2.112 mL	$u(x)$ と $u(t)$ を合成
U	拡張不確かさ			4.2 mL	包含係数は $k=2$

ビールジョッキの体積
 $633.5 \text{ mL} \pm 4.2 \text{ mL}, k=2$

再掲：不確かさの合成・拡張 バジェットシート

記号	不確かさ要因	標準不確かさ	感度係数	標準不確かさ (出力量の単位)	備考
u_R	測定の 繰返し性	1.138 mL	1	1.138 mL	繰返し回数は10回
u_S	標準器の校正 の不確かさ	1.5 mL	1	1.5 mL	メスシリンダーの校正 証明書より
u_t	温度による 効果	0.2887 °C	3.313 mL/°C	0.9565 mL	温度計のデジタル表 示の不確かさ。 分解能1°C
u_c	合成標準不確か さ			2.112 mL	
U	拡張不確かさ			4.2 mL	包含係数は $k=2$

ビールジョッキの体積
633.5 mL ± 4.2 mL, $k=2$

最後に

- ここで解説したモデル式を用いた不確かさ評価方法が一般に用いられている手法である。よって本手法を理解しないと、不確かさ評価を実際に行うことは難しく、また一般に公開されている不確かさ評価事例を理解することもまた難しい。
- 是非この手法を理解し、いろいろな測定に対して適用していただきたい。