

不確かさ評価入門

産業技術総合研究所 榎原研正

目次

- 1 計測における不確かさの表現のガイド（GUM）の誕生
- 2 不確かさ評価とはどんな問題か
 - 2.1 液体の体積測定の例
 - 2.2 評価手順の概観
- 3 不確かさ評価で用いられる統計
 - 3.1 ばらつきの大さの表現 【練習問題1】
 - 3.2 母集団と試料
 - 3.3 平均値の統計的性質 【練習問題2】
 - 3.4 重要な確率分布
- 4 不確かさの定義と評価
 - 4.1 不確かさの定義
 - 4.2 Aタイプ評価 【練習問題3】
 - 4.3 Bタイプ評価 【練習問題4】
- 5 不確かさの合成 【練習問題5-9】
- 6 その他の話題
 - 6.1 バジエット表
 - 6.2 不確かさの表記方法
 - 6.3 不確かさの代表的要因
 - 6.4 不確かさと測定誤差
- 7 おわりに
 - 7.1 不確かさ評価手順のまとめ
 - 7.2 次のステップに向けて

1 計測における不確かさの表現のガイド（GUM）の誕生

測定結果の信頼性をどのように評価すればよいかは、悩ましい問題である。測定を何度か反復して得たデータとして、図1の(a)と(b)のケースがあったとする。現実の測定技術が完全でないために、反復データには一般にばらつきが生じる。Case (a)の方がばらつきが少ないけれども、これだけで信頼性が高いと言えるだろうか。むしろ、データが測定対象の真の値からどれだけ乖離しているかが重要であろう。もし真値がCase (b)のデータ範囲の右半分のところにあるならば、全体としてデータが真値に近いCase (b)の方が信頼性は高いと判断するのが妥当と考えられる。

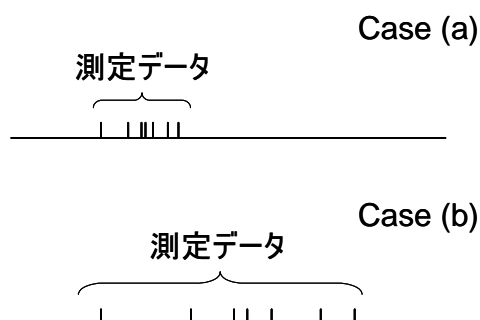


図1 信頼性はどちらが高いか

しかし、現実の測定では、真値がどこにあるかが厳密にわかっていることはあり得ないから、真値が不明のまま、測定結果がどれだけ真値に近いかを判断しなければならない。ここに測定の信頼性の評価の原理的困難がある。

このような難しさもあって、測定結果の信頼性をどのように評価・表現するかについては、従来から国や技術分野によって異なる幾つかの考え方が存在し、混乱があった。国際度量衡委員会(CIPM)は1970年代後半にこの問題を提起し、これを契機に、計測に関わる幾つかの国際機関が関与して、測定結果の信頼性の評価と表現の統一的な方法を定める作業が行われた。その成果が、1993年にISO(国際標準化機構)等を含む7つの国際機関の名前で出版された「計測における不確かさの表現のガイド」(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement ; GUM)である。

GUMは、評価手順のルールの中に「真値」や「測定誤差」といった原理的に不可知な量は持ち込まない、という立場を採用した(6.4参照)。そして、従来からの同種概念と区別するため、測定結果の信頼性(の低さ)の新しい指標として「不確かさ」を導入した。GUMに述べられた不確かさ評価の考え方には、高い技術的合理性と一貫性が認められたため、「不確かさ」の考え方は急速に普及し、測定の信頼性が重要となる局面で広く利用されるようになっている。

2 不確かさ評価とはどんな問題か

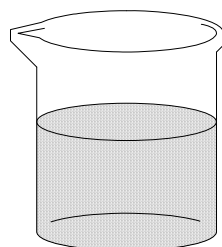
2. 1 液体の体積測定の例

不確かさ評価の手順の説明のために、次の液体体積測定の例を取り上げる。この例は、本テキスト全体を通して使用する。

液体の体積測定

ある液体の体積 v を、その質量と密度から求めることにした。まず、液体の質量を質量計で5回反復測定し、測定データ{100.0 g, 100.3 g, 99.9 g, 99.7 g, 100.1 g}を得た。一方、液体の密度については、あるハンドブックに次の情報が記載されていた。「この液体の密度の値は 2.00 g/cm^3 である。この値の誤差は $\pm 0.01 \text{ g/cm}^3$ を越えない。」

- (1) この液体の体積 v を求めよ。
- (2) 求めた体積 v の不確かさはいくらか。



質量 : {100.0 g, 100.3 g, 99.9 g, 99.7 g, 100.1 g}
密度 : $2.00 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$
体積 ?

【注意】 この例は、説明を容易にするための、簡単化されたモデルである。実際の不確かさ評価では、考慮すべき不確かさ要因が他にも存在するであろう。

2. 2 評価手順の概観

ここでは不確かさ評価の流れを概観する。各手順については、次節以下で詳しく説明する。

[1] 基本方針

体積の値 v は、質量の測定データの平均値 \bar{m} と密度の文献値 ρ_0 ($= 2.00 \text{ g/cm}^3$) から

$$v = \frac{\bar{m}}{\rho_0} \quad (2-1)$$

により求める。従って、 v の不確かさ $u(v)$ の評価は、質量の不確かさ $u(\bar{m})$ と密度の不確かさ $u(\rho_0)$ をまず求め、これらを合成することによる。

[2] 質量の不確かさ $u(\bar{m})$

個々のデータ m_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) の不確かさ $u(m_i)$ は、データ5個から計算される実験標準偏差 s (\Rightarrow 3. 1) で表されると考えてよい。すなわち

$$u(m_i) = s \quad (2-2)$$

$u(\bar{m})$ と $u(m_i)$ はどのような関係にあると考えられるか? (\Rightarrow 3. 3)

[3] 密度の不確かさ $u(\rho_0)$

ハンドブックの記述は、密度の値 $\rho_0 = 2.00 \text{ g/cm}^3$ に何らかの曖昧さ ($\pm 0.01 \text{ g/cm}^3$) があることを意味している。この曖昧さを、図2のような確率密度関数 $p(\rho)$ で表すことにしよう。そこで、 $u(\rho_0)$ を次のように求める。

$$u(\rho_0) = \text{確率密度関数 } p(\rho) \text{ の標準偏差} \quad (2-3)$$

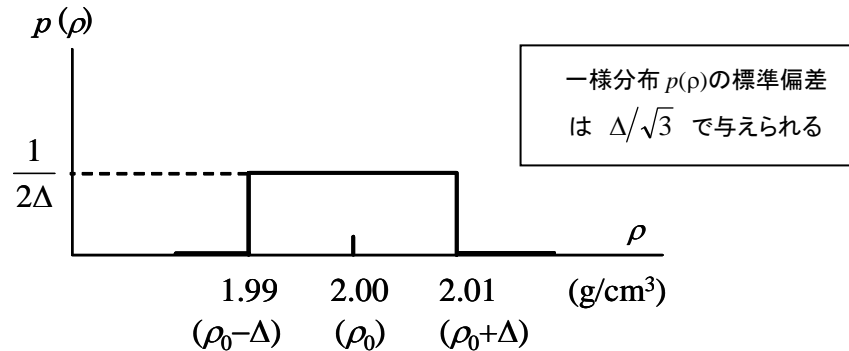


図2 密度の値の曖昧さを表すものとして想定した確率密度関数

[4] 不確かさの合成

$u(v)$ は、次の不確かさの伝播則を利用して求める。

$$u^2(v) = [c_{\bar{m}} u(\bar{m})]^2 + [c_{\rho_0} u(\rho_0)]^2 \quad (2-4)$$

ここで、 $c_{\bar{m}}$ 、 c_{ρ_0} は感度係数と呼ばれ、それぞれ \bar{m} と ρ_0 が少し変化したときに、 v がどれだけ変化するかを表す係数である (⇒ 5節)。

[5] 不確かさの報告

$u(v)$ は標準偏差に相当する大きさの不確かさであるため合成標準不確かさと呼ばれる。最終的な不確かさは、単に合成標準不確かさとして報告してよい。しかし、合成標準不確かさを定数倍した拡張不確かさ $U = k \times u(v)$ を用いて、 $\pm U$ という信頼の区間の形で報告されることも多い。この定数 k を包含係数と言い、しばしば $k = 2$ が用いられる。

【注意1】 この例の体積のように、最終的に求めたい量を一般に測定量、測定量の値を決めるために必要な質量や密度のような量を入力量と呼ぶ。

【注意2】 一般に幾つかの入力量 x_1, x_2, \dots, x_N の関数として測定量 y を表現した式 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ を測定の数学的モデルと呼んでいる。式(2-1)は測定の数学的モデルの例である。なお5節【注意2】も参照のこと。

【注意3】 標準偏差相当の大きさとして表した不確かさを標準不確かさといい、小文字の u を用いて表す習慣になっている。 $u(v)$ 、 $u(\bar{m})$ 、 $u(\rho_0)$ はいずれも標準不確かさの例である。合成標準不確かさ $u(v)$ にはしばしば添え字 c (combined) をつけて、 $u_c(v)$ のように書く。

【注意4】 拡張不確かさは大文字 U で表す習慣になっている。

3 不確かさ評価で用いられる統計

3.1 ばらつきの大さの表現 — 標準偏差 —

測定を n 回反復して得られたデータを $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ とする。完全無欠な測定方法は現実には無いので、これらの測定データは一般にばらつきをもつ。ばらつきの大さの程度は、標準偏差で表すことができる。標準偏差を計算するには以下の手順による。

- Step 1 : 平均値

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (3-1)$$

- Step 2 : 平方和

$$S = (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2 \quad (3-2)$$

- Step 3 : 分散

$$V = \frac{S}{n-1} \quad (3-3)$$

- Step 4 : 標準偏差

$$s = \sqrt{V} \quad (3-4)$$

S , V , s はすべてばらつきの大さの指標と考えることができるが、平方和 S は、データをたくさん取れば取るほど大きくなってしまいう点で都合が良くない。分散 V はこの欠点を解消したもので、ばらつきの指標として適当な量である。ただし、 V の次元は元のデータの2乗であるので、元のデータと同じ次元をもつ標準偏差 s が、ばらつきの指標として都合が良いのである。

【練習問題1】(標準偏差の計算)

液体の体積測定の例における、質量の反復測定データ $\{100.0 \text{ g}, 100.3 \text{ g}, 99.9 \text{ g}, 99.7 \text{ g}, 100.1 \text{ g}\}$ について、その標準偏差を求めよ。

3.2 母集団と試料

ばらつきを含むデータ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ を統計学的に扱うときには、次のような考え方がとられる。

測定を n 回でなく無限回反復したと仮想して、これにより得られる無限個の値からなる集合を考える。このような集合を測定データの**母集団**という。そして実際に得られた測定データ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ は、母集団からランダムに取り出した n 個の**試料**と考えるのである。

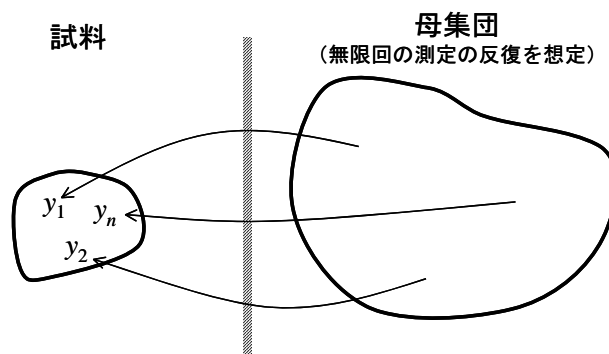


図3 測定データの統計学的扱い

母集団にはどのような値のデータも均等に含まれるわけではない。ある特定の値の付近に含まれる割合は大きいであろうが、それから離れた値をもつデータの割合は小さい。このような母集団の性質は、下図のように、確率密度関数 $p(y)$ によって表すことができる。

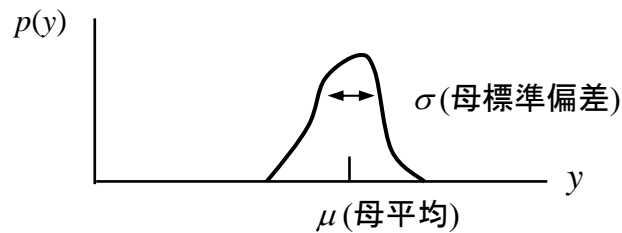


図4 母集団を特徴づける確率密度関数

3. 1で示した平均値や標準偏差のように、試料 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ から計算によって導かれる量を一般に**統計量**と呼んでいる。特にこれらが試料についての量であることを明示したいときには、試料平均や実験標準偏差（あるいは試料標準偏差）といった呼び方をする。これに対して母集団の性質を表すパラメータは、**母数**と呼ばれる。平均値や標準偏差が母集団に対するものであることを明示するときには、それぞれ母平均、母標準偏差と呼ぶ。これらの値は確率密度関数 $p(y)$ から計算によって導かれる。

母数を表すときには常にギリシャ文字を、統計量を表すときにはアルファベットを用いるようにしておくこと無用の混乱をさけることができる。次のような記号がよく使われる。

母平均： μ ←————→ 試料平均： m, \bar{x}, \bar{y} など
 母標準偏差： σ ←————→ 実験標準偏差： s

母集団が決まれば、その母平均も母標準偏差もただ一つに決まる。我々が測定するときに、究極的に知りたいのはこのような母数である。しかし、現実無限回の測定を行うことはできないので、母数は厳密には知ることができない量である。

そこで母数を推定するために統計量がいられる。試料の大きさ n が十分大きければ、試料平均 m は母平均 μ に、実験標準偏差 s は母標準偏差 σ に近い値をとると期待できる。ただし一般に厳密には一致しないであろう。個々のデータ y_i が確率変数であるのと同様、統計量も確率変数である。

表1 統計量と母数

統計量	母数
測定データから計算される量 (試料平均、実験標準偏差など)	母集団の性質を表すパラメータ (母平均、母標準偏差など)
母数について知るための手掛かり、 最終的に知りたい量ではない	最終的に知りたい量
可知	不可知
ばらつく(確率変数)	ばらつきを持たない(一意的)

3. 3 平均値の統計的性質

母集団から試料を取り出す際に、データを4個ずつのグループに分けて取り出すものとして。各グループの4個のデータからその平均値を1個計算することができる。この作業を無限回繰り返したと想定すると、平均値自体を要素とする母集団を新たに考えることができる。

元データの母集団と平均値を要素とする母集団はどのような関係にあるだろうか。元の母集団の母平均を μ 、母標準偏差を σ とすると、平均値の母集団の母平均と母標準偏差はどうかという点に特に関心がある。

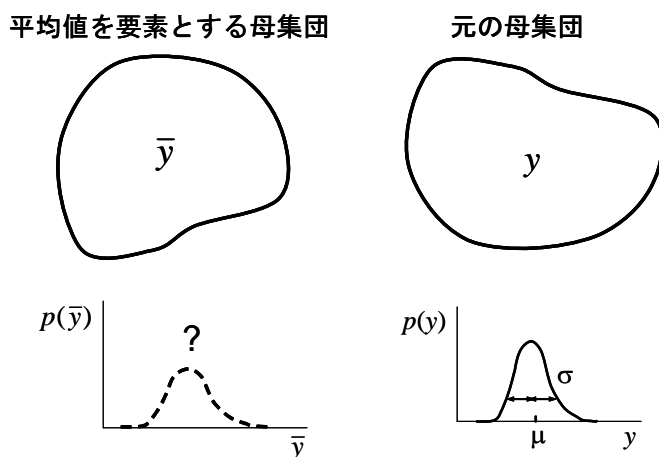


図5 元データの母集団と平均値の母集団はどう違うか？

【練習問題2】(平均値の統計的性質)

母平均 μ 、母標準偏差 σ の母集団Aからランダムに取り出した n 個のデータの平均値 \bar{y} を要素とする新しい母集団 \tilde{A} を考える ($n > 1$)。 \tilde{A} の母平均を $\tilde{\mu}$ 、母標準偏差を $\tilde{\sigma}$ とするとき、 μ と $\tilde{\mu}$ 、及び σ と $\tilde{\sigma}$ の大小関係として正しいものは以下のうちどれか、予想せよ。

母平均		母標準偏差	
(1)	$\tilde{\mu} < \mu$	(1)	$\tilde{\sigma} < \sigma$
(2)	$\tilde{\mu} = \mu$	(2)	$\tilde{\sigma} = \sigma$
(3)	$\tilde{\mu} > \mu$	(3)	$\tilde{\sigma} > \sigma$

【練習問題2】における μ と $\tilde{\mu}$ 、及び σ と $\tilde{\sigma}$ の定量的関係として、ここでは証明なしに以下が成立することを述べておく。

$$\tilde{\mu} = \mu \tag{3-5}$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma/\sqrt{n} \tag{3-6}$$

不確かさ評価において、特に式(3-6)は重要である。

【実験】（平均値の統計的性質）

【練習問題2】で検討した平均値の統計的性質を実際に確認するには、次のような実験をしてみるとよい。まず、サイコロを準備する。これをここでは測定器とみなす。サイコロは1個でもよいが、たくさんのデータをとるのは大変なので、できれば4個以上のサイコロがあるとよい。

(1) サイコロ1個を振ったときに出た目を1個の測定結果として記録する。少なくとも60個の測定結果を得て、1から6までの各目が出た頻度をヒストグラムに整理する。

(2) サイコロを4個（あるいは4回）振ったときの4個の目の平均値を1個の測定結果として記録する。ただし、(1)のヒストグラムとの比較のため、

- 平均値 ≤ 1.5 のとき、測定結果 $\Rightarrow 1$
- $1.5 < \text{平均値} \leq 2.5$ のとき、測定結果 $\Rightarrow 2$
- $2.5 < \text{平均値} \leq 3.5$ のとき、測定結果 $\Rightarrow 3$
- ...



と近似する。(1)と同じ個数の測定結果を得て、ヒストグラムとして整理する。

(1)と(2)で分布の位置と幅がどのように異なるかを観察せよ。何故このようなことが生じるか、考察せよ。

3. 4 重要な確率分布

不確かさ評価において特に重要な確率分布は、次の2つである。

(1) 正規分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

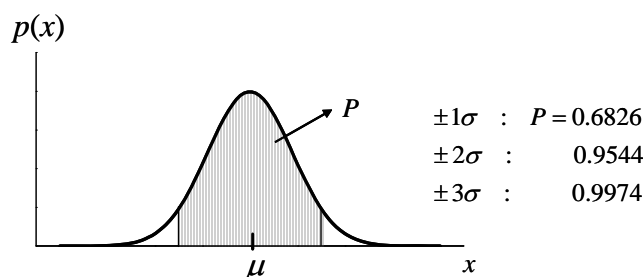


図6 正規分布の確率密度関数

(2) 一様分布

$$p(x) = \begin{cases} 1/(2\Delta) & (|x - \mu| \leq \Delta) \\ 0 & (|x - \mu| > \Delta) \end{cases}$$

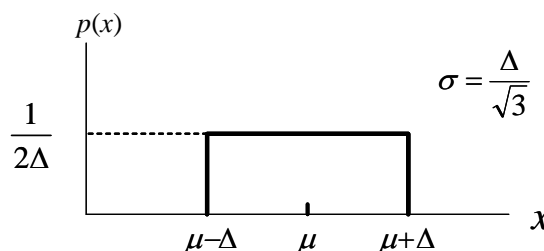


図7 一様分布の確率密度関数

4 不確かさの定義と評価

4. 1 不確かさの定義

GUM では「不確かさ」を次のように定義している。

不確かさ：測定の結果に付随した、合理的に測定量に結びつけられ得る値のばらつきを特徴づけるパラメータ

「合理的に測定量に結びつけられ得る値」とは何だろうか。これは、「測定量の真値の候補」、もう少し詳しくは、「利用可能な情報にもとづき、測定量の真値の候補とみなしても不合理ではない値の集合」と解釈できる。これらの点について、液体の体積測定を例として説明する。

4. 2 Aタイプ評価

液体体積測定の場合における質量の5個の測定データを考える。それぞれのデータは質量の真の値の「候補」である、と言って差し支えない。それだけでなく、5個のデータの背後に想定できる母集団に属する値はすべて候補と言って差し支えない。すなわち、「実際に得た測定データの背後にある母集団」が、「合理的に測定量に結びつけられ得る値」であると言える。そのばらつきを特徴づけるパラメータとしては母標準偏差をとればよいのだが、母標準偏差自体は不可知なので、その推定値として、5個のデータから計算される実験標準偏差 s ($\cong 0.22$ g) を利用する。この考え方は下の図のように整理される。

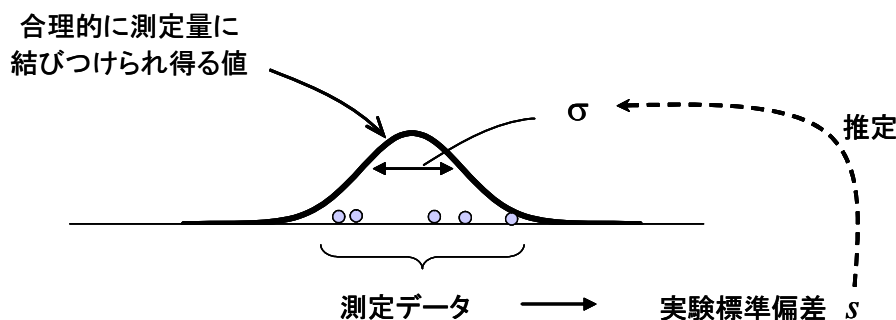


図8 Aタイプ評価の考え方

従って、個々のデータ m_i の不確かさ $u(m_i)$ は、次のように評価できる。

$$u(m_i) = 0.22 \text{ g} \quad (4-1)$$

しかし、手元には5個のデータがあるのだから、個々のデータ m_i でなく、5個のデータの平均値 \bar{m} を質量の測定結果とすることが普通であろう。式(3-6)を考慮すると、 \bar{m} の不確かさは次のように評価できる。

$$u(\bar{m}) = \frac{u(m_i)}{\sqrt{5}} \cong 0.10 \text{ g} \quad (4-2)$$

一般に、 n 個のデータ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が得られ、その平均値が \bar{x} 、実験標準偏差が s であるとき、測定結果 \bar{x} の不確かさは次のように評価する。

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{Aタイプ評価の基本式}) \quad (4-3)$$

求めた不確かさは、標準偏差の大きさに相当するので、標準不確かさと呼ぶ。また以上のような、一連の観測値の統計解析による評価を、標準不確かさのAタイプ評価という。

【練習問題3】(Aタイプ評価)

液体の質量測定を3回反復し、データ{53.0 g, 53.2 g, 52.8 g}を得た。

- 1) 質量の測定結果はいくらか?
- 2) この測定結果の標準不確かさを評価せよ。

注意：ここではデータのばらつき以外の不確かさ要因を考慮していない。また、データは仮想データである。3個のデータからではばらつきの母標準偏差の正確な推定は難しいので、実際の不確かさ評価では、もっと多数のデータをとるべきである。

4. 3 Bタイプ評価

ハンドブックに記載の「この液体の密度の値は 2.00 g/cm^3 である。ただしこの値の誤差は $\pm 0.01 \text{ g/cm}^3$ を越えない」という情報に基づいて、密度の真の値の候補としては、図9(a)のような一様分布の確率密度関数で表される値の集合を想定して良いであろう。この集合が、「合理的に測定量に結びつけられ得る値」である。そのばらつきの指標としては、確率密度関数から決まる標準偏差を使えばよい。一様分布の標準偏差は「半幅/ $\sqrt{3}$ 」で与えられるので、密度の推定値 $\rho_0 (= 2.00 \text{ g/cm}^3)$ の標準不確かさを次のように評価する。

$$u(\rho_0) = \frac{0.01}{\sqrt{3}} \cong 0.0058 \text{ g/cm}^3 \quad (4-4)$$

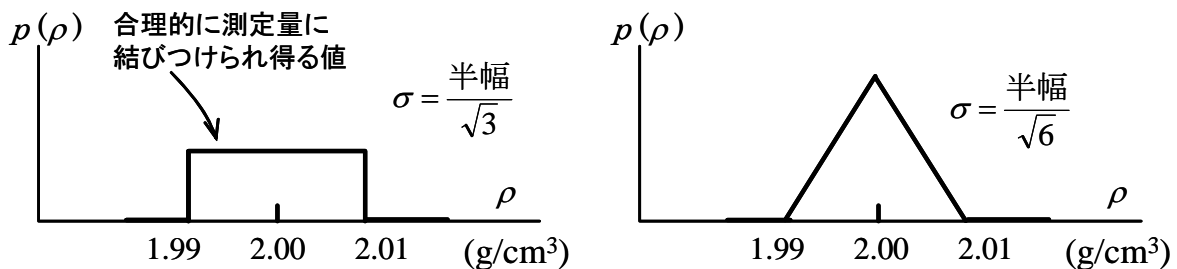


図9 (a) 一様分布を想定する場合

(b) 三角分布を想定する場合

必ず一様分布を想定しなければならないということではない。中心付近の値の方がより確率が高いと考えられるならば、例えば上図(b)の三角分布を想定してもよい。三角分布の標準偏差は「半幅/ $\sqrt{6}$ 」で与えられる。

以上のように、一連の観測値の統計的解析によらない標準不確かさの評価は、**Bタイプ評価**と呼ばれる。

【練習問題4】(Bタイプ評価)

- (1) 次の文献情報に基づき、 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ での純銅の線膨張係数の値と、その標準不確かさを求めよ。

「 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ における純銅の線膨張係数 α は $16.52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ である。この値の誤差は $0.40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ 以下である。」

- (2) もし情報が次のように与えられているならば、標準不確かさはどうなるか。

「 $20 \text{ }^\circ\text{C}$ における純銅の線膨張係数 α は $16.52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ である。この値の95%信頼限界は $\pm 0.40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ である。」

5 不確かさの合成

一般に、測定の数学的モデルが

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (5-1)$$

で与えられるとき、測定量 y の標準不確かさ $u_c(y)$ は、入力量 x_i の標準不確かさ $u(x_i)$ から次のように計算される。

$$u_c^2(y) = [c_1 u(x_1)]^2 + [c_2 u(x_2)]^2 + \dots + [c_N u(x_N)]^2 \quad (5-2)$$

係数 c_i は感度係数と呼ばれ、入力量 x_i が変化したときに、測定量 y がどれだけ変化するかを表す値である。これは下図の説明からわかるように、 x_i に関する y の傾き（数学的には偏微分係数 $\partial f / \partial x_i$ ）で与えられる。従って、式(5-2)を書き直すと次のようになる。

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (5-3)$$

この式は不確かさの伝播則と呼ばれている。

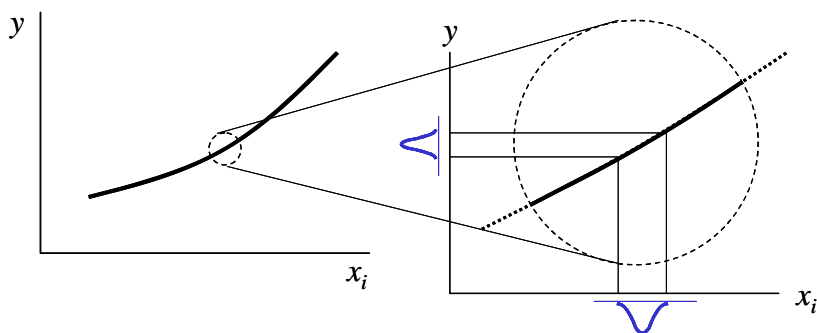


図10 入力量 x_i が微量変化したときに、 y はどれだけ変化するか？

【注意1】偏微分は、この種の解析を日常的に行っていない人には敬遠したい演算かも知れない。下の演習問題は、数値的な計算によって、偏微分係数を機械的に求めることができることを示している。

【注意2】GUM では、入力量 X_i とそれに対する推定値（測定結果） x_i を区別し、別の記号を用いて表している。同様に、測定量 Y に対してその推定値は y と表される。従って、式(5-1)は、本来 Y と X_i の間の関係として表すべきものであるが、このテキストでは、混乱が生じない範囲で、入力量（もしくは測定量）とそれらに対する推定値を同じ記号で表した。

【演習問題5】（感度係数）

液体の体積測定の例 $v = \bar{m} / \rho_0$ において、体積 v に対する質量 \bar{m} の感度係数 $c_{\bar{m}}$ を、次の二つの方法で求めて、結果を比較せよ。ただし $\bar{m} = 100.0 \text{ g}$ （5回の反復測定の平均値）、 $\rho_0 = 2.00 \text{ g/cm}^3$ （文献値）とする。

- (1) まず v の値を求めよ。次に \bar{m} が 100.0 g から少しだけ（例えば 0.001 g ）変化したときに、 v がどれだけ変化するかを求めよ。以上から、 v の \bar{m} に対する傾きを計算せよ。
- (2) 偏微分係数 $\frac{\partial v}{\partial \bar{m}}$ を計算し、これの $\bar{m} = 100.0 \text{ g}$ 、 $\rho_0 = 2.00 \text{ g/cm}^3$ における値を求めよ。

$$\left(\text{一般に、} f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \text{ のとき、} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2} \right)$$

【演習問題6】(感度係数)

v に対する ρ_0 の感度係数 c_{ρ_0} を、上の二つの方法で求め、結果が一致するかどうか検討せよ。

【練習問題7】(不確かさ評価のまとめ)

液体の体積測定の場合において、以下の空欄を埋めつつ、不確かさ評価を完成せよ。

(1) 質量の5回の反復測定データが {100.0 g, 100.3 g, 99.9 g, 99.7 g, 100.1 g} であった。これから質量の測定結果は $\bar{m} =$ _____ g である。

(2) 質量測定の実験標準偏差は、 $s =$ _____ g である。

(3) \bar{m} の標準不確かさは、

$$u(\bar{m}) = \frac{s}{\quad} = \quad \text{g} \quad \text{となる。}$$

(4) ハンドブックの記述「この液体の密度の値は 2.00 g/cm³ である。この値の誤差は ± 0.01 g/cm³ を越えない」に基づき、密度値として $\rho_0 =$ _____ g/cm³ を用いる。

(5) ρ_0 の標準不確かさは、 $u(\rho_0) =$ _____ g/cm³ と評価できる。

(6) この液体の体積は $v = \bar{m}/\rho_0$ より計算できる。これより体積の測定結果は、
 $v =$ _____ (単位: _____)。

(7) 不確かさの伝播則を利用して、合成標準不確かさ $u_c(v)$ を $u(\bar{m})$ と $u(\rho_0)$ を用いて表すと、

$$u_c^2(v) = \frac{(\quad)^2 \cdot u^2(\bar{m}) + (\quad)^2 \cdot u^2(\rho_0)}{\quad}$$

(8) 以上から

$$u_c(v) = \quad \text{(単位: _____)} \quad \text{と評価できる。}$$

(9) 包含係数を $k=2$ とすると、拡張不確かさは

$$U = \quad \text{(単位: _____)} \quad \text{となる。}$$

【練習問題8】

質量計の仕様書に、「自動校正に使用される内蔵分銅の誤差は 0.1 g 以下」と記述されていた。

(1) 反復測定の際のばらつきと、内蔵分銅の誤差をともに考慮して、質量測定結果の不確かさ $u(\bar{m})$ を再評価せよ。

(2) この結果、 $u_c(v)$ はいくらになるか。

(3) 液体の体積測定の場合において、他に考えられる不確かさ要因をリストアップせよ。

【練習問題9】

家庭用血圧計を用いて、血圧を5回反復測定したところ、最高血圧の値として次を得た。

123, 125, 119, 117, 121 (単位: mmHg)

一方、この血圧計の仕様書には、「精度: ± 4 mmHg」と記載されていた^{注)}。

(1) 最高血圧の測定結果を求めよ。

(2) この測定結果の不確かさを評価せよ。

注) 仕様書の記載は、「指示値の系統的ずれは ± 4 mmHg を超えることはない」と解釈できるものとする。

6 その他の話題

6.1 バジレット表

不確かさ評価の計算は、不確かさのバジレット表として整理しておくが良い。液体の体積測定の場合において、質量計の校正用内蔵分銅の誤差も考慮する場合、以下のように整理できる。最終的な合成標準不確かさは、有効数字2桁で表しておく。

表2 液体の体積測定における不確かさバジレット表

要因	標準不確かさ $u(x_i)$	評価方法	感度係数 c_i	$u_c(y)$ への寄与 $ c_i u(x_i)$
		根拠/タイプ		
質量 \bar{m}	$u(\bar{m}) = 0.115 \text{ g}$		$0.5 \text{ cm}^3/\text{g}$	0.058 cm^3
質量測定ばらつき 内蔵分銅の誤差	$\uparrow \begin{cases} u_R(\bar{m}) = 0.100 \text{ g} \\ u_W(\bar{m}) = 0.058 \text{ g} \end{cases}$	5回の反復測定/A 質量計仕様書/B	—	—
密度 ρ_0	$u(\rho_0) = 0.0058 \text{ g/cm}^3$	ハンドブック/B	$-25.0 \text{ cm}^6/\text{g}$	0.144 cm^3
合成標準不確かさ $u_c(v) = \sqrt{\sum [c_i u(x_i)]^2}$				0.155 $\cong 0.16 \text{ cm}^3$

6.2 不確かさの表記方法

公称値100 gの分銅の質量 m_s の測定結果の報告について、不確かさの表記の例を示す（GUMより引用）。

(a) 合成標準不確かさを用いる場合

「 $m_s = 100.02147 \text{ g}$ 、合成標準不確かさは $u_c(m_s) = 0.35 \text{ mg}$ 」

(b) 拡張不確かさを用いる場合

「 $m_s = (100.02147 \pm 0.00070) \text{ g}$ 、ただし記号±に続く数字は、包含係数 $k = 2$ に対応する拡張不確かさである」

合理的に測定量に結びつけられ得る値の分布が正規分布に従うと考えて良い場合には、包含係数を2とした拡張不確かさ U について、 $\pm U$ の範囲にそのような値のおよそ95%が含まれることになる。

6.3 不確かさの代表的要因

不確かさの生じる代表的要因として次のようなものがある。

- 測定量の不完全な定義
- 測定量の定義の不完全な実現
- 環境条件の影響についての不完全な知識
- 環境条件に対する不完全な測定
- 測定装置の分解能の限界、識別限界
- 校正に用いる標準の値の不正確さ
- 外部からの情報（物理定数、物性値等）の値の不正確さ
- 測定方法や手順に組み込まれた近似や仮定
- みかけ上同一条件下で測定を反復したときに生じるばらつき

6. 4 不確かさと測定誤差

測定結果の信頼性（の低さ）を表す指標としては、「測定誤差」が GUM の発行以前からしばしば用いられてきた。測定誤差は、

$$\text{測定誤差} = \text{測定値} - \text{真値}$$

と定義され、通常、偶然誤差（ばらつき）と系統誤差（かたより）に分類される（表3）。偶然誤差は測定データがどのようにばらつくかをみれば評価できるけれども、系統誤差は「真値」という不可知量からの距離を考える必要がある、その評価には原理的困難が伴う。また、例えば、微小でランダムな時間的変動が累積して目に見えるかたよりが生じる場合のように、現実には偶然誤差と系統誤差の仕分けが判然としないことも多い。さらに、各誤差成分を合成して全体としての誤差の大きさを求めようとするときに、系統誤差の扱いに関して幾つかの可能な方式が有り得るため（表3）、これも測定誤差の評価における混乱の一つの要因であった。

「不確かさ」は、このような「測定誤差」の評価に伴う曖昧さや混乱を避け、一貫した手順に従って評価し得るものとして GUM で導入されたものといえる。GUM の特に目新しい点は、Bタイプ評価の考え方の導入である。Bタイプ評価では、我々が入手可能な情報の曖昧さを確率密度関数として表現し、その拡がりの程度を不確かさとして求める。「測定誤差」の評価の際の困難の源であった系統誤差の扱いを、Bタイプ評価という考え方の導入により、先験的分布の想定に主観的判断が残る場合はあるものの、紛れが少ない手順によって明確化したといえる。

ただし、不確かさのAタイプとBタイプの区別は、評価方法による分類であって、不確かさの性質による分類ではないことは注意すべきである。すなわち、ばらつき=Aタイプ、かたより=Bタイプの対応づけは、常には成立しない。

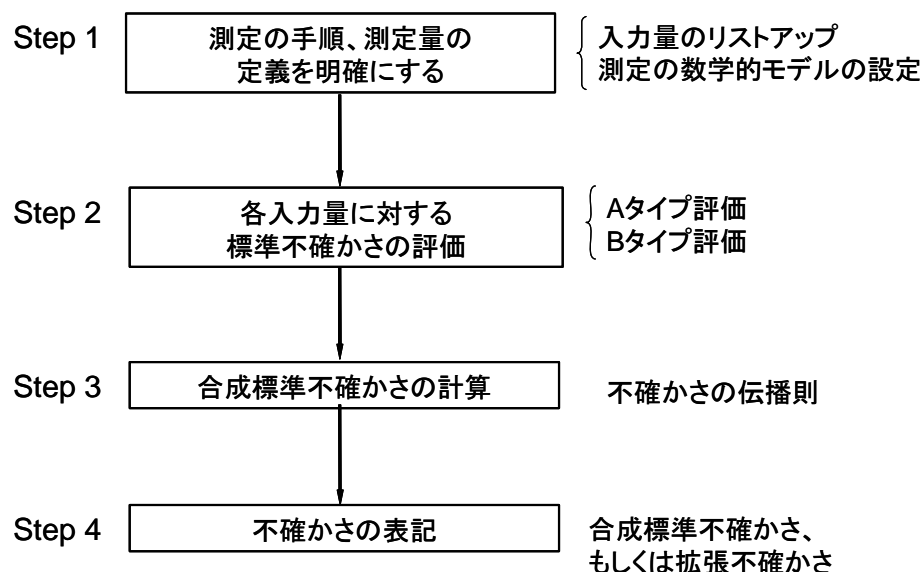
GUM では、不確かさの評価手順を曖昧さなく規定するため、不可知量である「真値」や「誤差」という用語をその中で使用することを意識的に避けている。不確かさの定義において「合理的に測定量に結びつけられ得る値」というやや複雑な言い回しがされるのはそのためである。

表3 不確かさと測定誤差の比較

	不確かさ	測定誤差
定義	測定の結果に付随した、合理的に測定量に結びつけられ得る値のばらつきを特徴づけるパラメータ	測定値－真値
分類	評価方法の分類 <ul style="list-style-type: none"> • Aタイプ評価 • Bタイプ評価 	誤差の性質の分類 <ul style="list-style-type: none"> • 偶然誤差 • 系統誤差
合成の方法	不確かさの伝播則による (相関を考慮した伝播則は、形式的には、右欄の全ての方式を包含する)	<ul style="list-style-type: none"> • 2乗和平方根方式 $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ • 絶対値の和方式 $d = a + b$ • 混合方式 $d = \sqrt{a^2 + b^2} + c$

7 おわりに

7. 1 不確かさ評価手順のまとめ



7-2 次のステップに向けて

このテキストの中で十分に説明できなかったトピックスについて、以下で簡単に触れる。詳細についてはGUMや他の成書を参照のこと。

(1) Aタイプ評価の実験を日常測定とは別に行う

日常の測定では、 m 回の繰り返しデータ $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ の平均値 \bar{x} を測定結果として利用しており、いま、 \bar{x} の不確かさ評価を行いたいものとする。 m は 1 でもよい。 m が十分大きな値でない場合、実験標準偏差 s 自体のばらつきが大きい ($m=1$ のときには s を求めることすらできない)。このようなときには、事前に不確かさ評価の実験を行い、十分大きい繰り返し回数 n のデータから s を求めておくのがよい。このような事前実験で得られたデータを $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 、その平均値を \bar{z} とすると、繰り返しのばらつきに付随する \bar{x} の不確かさは

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^n (z_j - \bar{z})^2}$$

で計算される。式(4-3)では $m=n$ であったので、上の式は式(4-3)を一般化したものといえる。

(2) 入力量間の相関

式(5-2), (5-3)は入力量の間に関係がない場合の伝播則である。相関がある場合は、次のように、入力量間の相関係数 $r(x_i, x_j)$ を含む項がつけ加わる。

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

(3) 相対不確かさの伝播則

測定の数学モデルが、 c と $p_i (i = 1, 2, \dots, N)$ を定数として、

$$y = c \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_N^{p_N}$$

のように、入力量 x_i のベキ関数の積として表される場合がある。この場合、不確かさの伝播則 (5-3) は次のように変形できる。

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(p_i \frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2 \quad (\text{相対不確かさの伝播則； 入力量間の相関がない場合})$$

液体の体積測定の場合についてもこの式が利用可能である。偏微分の計算が不要であるため、計算はこの方が簡単になる。

(4) 包含係数の選択

このテキストでは、包含係数として $k = 2$ を用いた。一方、区間 $\pm U$ の包含する確率が、信頼の水準として指定する値（例えば 95%）にできるだけ厳密に一致するように、包含係数を t -分布を用いて決める方法が採用されることもある。これを適正に行うには、Bタイプ評価による標準不確かさの自由度を決めるための、不確かさ自体の不確かさについての情報が必要であり、また、合理的に測定量に結びつけられ得る値の分布が正規分布で十分よく表されることの確認も必要である。これらの条件が満たされない場合は少なくないため、実用上の多くの場合に、包含係数として $k = 2$ とすることは現実的選択と考えられる。なお、自由度の小さいAタイプの不確かさ成分が主要な成分となっている場合には、 t -分布の利用が妥当である。

(5) ばらつきに構造がある場合のAタイプ評価

式(3-6)は、測定結果として4個のデータの平均値を使うことにすれば、分布幅は半分に、100個の平均値をとれば10分の1になることを意味している。これが実際に成り立つためには、測定データが、母集団の一部からの偏ったサンプリングでなく、全体からランダムにサンプリングされた試料と見なせることが必要である。例えば、短期間の繰り返しのばらつきと日を替えたときに生じるばらつきが大きさが異なる場合のように、ばらつきに構造が認められるような場合には、この点に特に注意する必要がある。この場合、同一日に100回の繰り返し測定を行って平均値を求めても、日間のばらつきの σ が10分の1になるわけではない。

ばらつきに構造がある場合、各ばらつき成分の分散をそれぞれ評価するためには、分散分析といわれる統計的手法が有用である。

参考書

- 1) ISO, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (1995)
- 2) ISO, *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*, 2nd ed. (1993)
- 3) 1の翻訳（2も含む）：「計測における不確かさの表現のガイド」（日本規格協会, 1996）
- 4) 今井秀孝編、「計測の信頼性評価 トレーサビリティと不確かさ解析」（日本規格協会, 1996）
- 5) 不確かさ研究会成果報告会資料（試験機関連絡協議会, 2001）
- 6) 近藤良夫, 舟阪渡編：「技術者のための統計的方法」（共立出版, 1967）

本資料は、「測定の不確かさ」に関する2ないし3時間の講義用テキストとして作成したものです。本資料は自由に再配布して頂いて構いません。編集や改変して利用する場合は、著者にご相談下さい。著作権は産業技術総合研究所および著者が保持しています。

産業技術総合研究所 計測標準研究部門 榎原研正 (ehara.kensei[at]aist.go.jp)

(Version 2007-03-03)