

# 不確かさ評価の理解に必要な 統計学の基礎

産業技術総合研究所 計測標準研究部門  
田中秀幸

## 1: 測定, 不確かさ評価を行う際 の心構えについて

計量管理の重要性についてを中心に

# 1-1: 測定量の定義について

## 何を測定するのか？

- 金属棒の長さをレーザー測長器によって測りたい。

このときの測定の定義は？

・定義: レーザー測長器によって金属棒の長さを測り, その測定結果を測定対象である金属棒の長さとする。

これでよいのか？

# 何を測定するのか？

## 問題点

- 測定は何回行うのか？
- 複数回測定を行った結果，その測定値の平均値を測定結果とするのか？それとも異なる代表値（中央値やモードや最大値や最小値など）を測定結果とするのか？
- mm以下のオーダーで長さが知りたいのであれば，測定時の温度も決めておく必要があるのでは？
- マイクロメートル以下のオーダーで長さが知りたいのであれば，値を補正するために，気圧，湿度，二酸化炭素濃度も測定しておく必要があるのでは？
- 測定対象の金属棒は，ある一つの金属棒の長さを知りたいのか？それともある製造ラインで作成される金属棒の平均の長さを知りたいのか？

# 何を測定するのか？

## 問題点

- レーザを照射する端面は完全に平面ではないので，端面内で5点ほど測定を行い，その平均値を測定結果とする必要があるのでは？

.....

このように，測定を行うためにはその測定の定義，測定方法，測定手順が明確になっている必要がある！

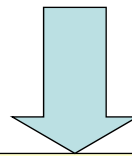
これが十分に分かっていないと測定をすることができない！

「とりあえず測ってみる」ということをしてはいけない！

# GUMの説明

## 3.1.1

測定の目的は測定量の値，すなわち測定される特定の量の値を決定することである。したがって，**測定は測定量，測定の方法及び測定手順を適切に明示することから始まる。**



これがきちりと決まっていないと，測定も不確かさ評価も行うことができない。

## 何を測定するのか？

- 金属棒の長さをレーザー測長器によって測りたい。

このときの測定の定義は？

・定義：顧客から持ち込まれた測定対象金属棒をレーザー測長器によってサブマイクロメートルオーダーで測定する。測定結果は20°Cのときの長さに補正する。また，レーザーは温度，気圧，湿度，二酸化炭素濃度によって影響を受けるので，それを補正するために，温度計，気圧計，湿度計によって，リアルタイムにそれぞれの量を測定し，補正する。二酸化炭素濃度については，一般的な二酸化炭素濃度をを用い補正する。測定は，金属棒の端面を5カ所に区切り，それぞれの場所で，3回ずつ測定を行い，その平均値を金属棒の長さとする。

# GUMの説明

## 3.1.3

実際には、**測定量の要求仕様すなわち定義は、要求される測定の正確さによって規定される。**

(注) **測定量の定義が完全でないと、測定結果の不確かさの評価に含まねばならないような、十分大きな不確かさの成分を生ずることになる。**

**測定量の定義が非常に重要である。**

## 何を測定するのか？

- 金属棒の長さを目幅1mmのものさしによって測りたい。

このときの測定の定義は？

- ・ 定義：顧客から持ち込まれた測定対象金属棒にもものさしを当て、その長さを読み取る。その際の測定回数は1回である。その読み取った長さを金属棒の長さとする。

## 1-2: 計量管理について

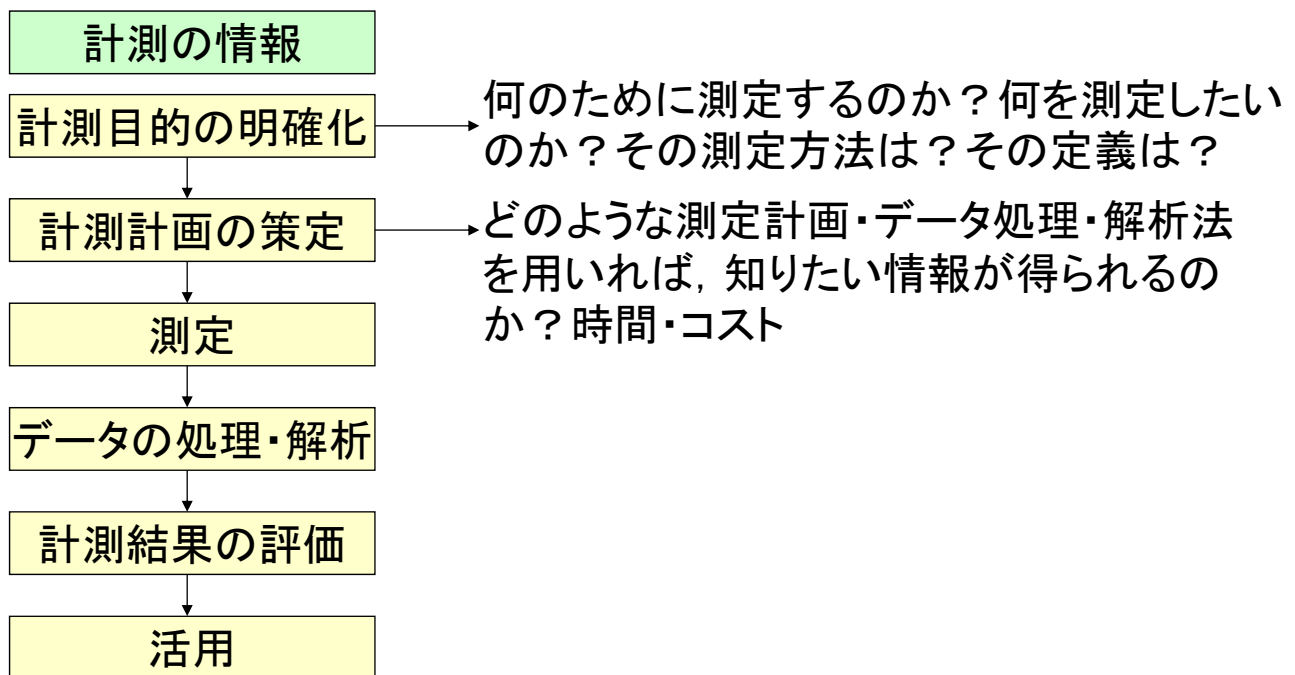
## 計量管理の意味

- 計測(Z8103)・・・特定の目的を持って、事物を量的にとらえる方法・手段を考究し、実施し、その結果を用い所期の目的を達成させること。

かなり広い意味としてとらえている！

計量管理とは、計測の活動を取り仕切ること！

# 計量管理の活動



## 測定計画について

- 製品の製造装置の比較

ある製品の製造装置を購入したい。

その製造装置はA社製のものとB社製のものがある。

どちらの装置を購入するかを決定するために、2つの装置で製品を製造して、そのできあがった製品を比較する。

また、どちらの装置でも1つの製品を製作するのに半日かかるとする。

このときどのような実験計画を立てればよいのかを考える。

# 測定計画について

- 普通に実験計画を立てると・・・

	1	2	3	4	5(回)
装置A	(1)	(3)	(5)	(7)	(9)
装置B	(2)	(4)	(6)	(8)	(10)

このような順番で実験を行うだろう。しかし、  
これでは不具合が起こることがある。

# 測定計画について

どちらの装置でも1つの製品を製作  
するのに半日かかるのだから・・・

月曜日の午前から実験を始めると実験が行われるのが、

	1	2	3	4	5(回)
装置A	月曜午前	火曜午前	水曜午前	木曜午前	金曜午前
装置B	月曜午後	火曜午後	水曜午後	木曜午後	金曜午後

このように装置Aは午前にのみ用いられ、装置Bは  
午後のみ用いられる。



# 測定計画について

- よって、午前に製造された製品と午後に製造された製品では、午前、午後に製作することによって、何らかのかたよりが生まれる可能性がある。
- そうであれば、二つの製品に差があったとしても、その差は装置が異なることが原因で引き起こされた差か、午前・午後に製造されたことによって引き起こされた差かが区別できない。

# 測定計画について

- ではどのようにすればよいのだろうか

## 実験のランダム化

実験のランダム化、とは実験を行う順番をランダムにするということである。

### ランダム化の方法

- ・乱数表を用いる。
- ・サイコロを用いる。
- ⋮

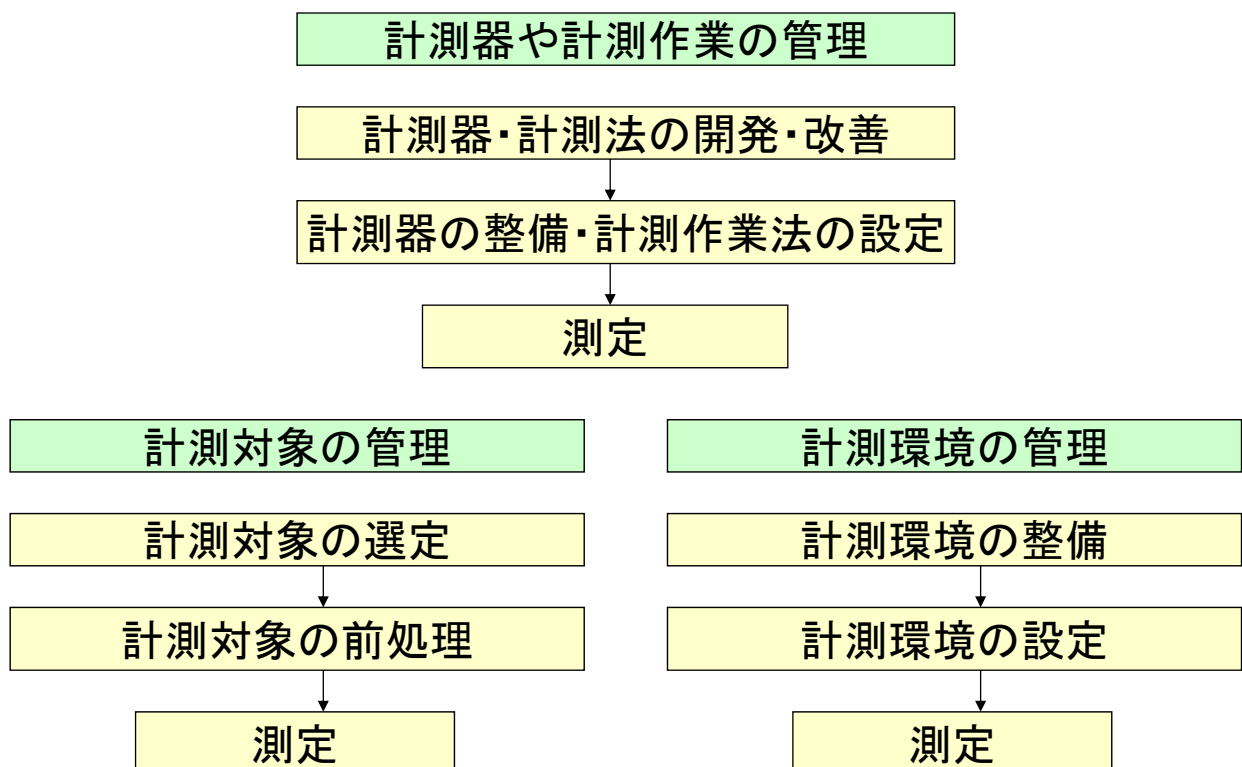
# 測定計画について

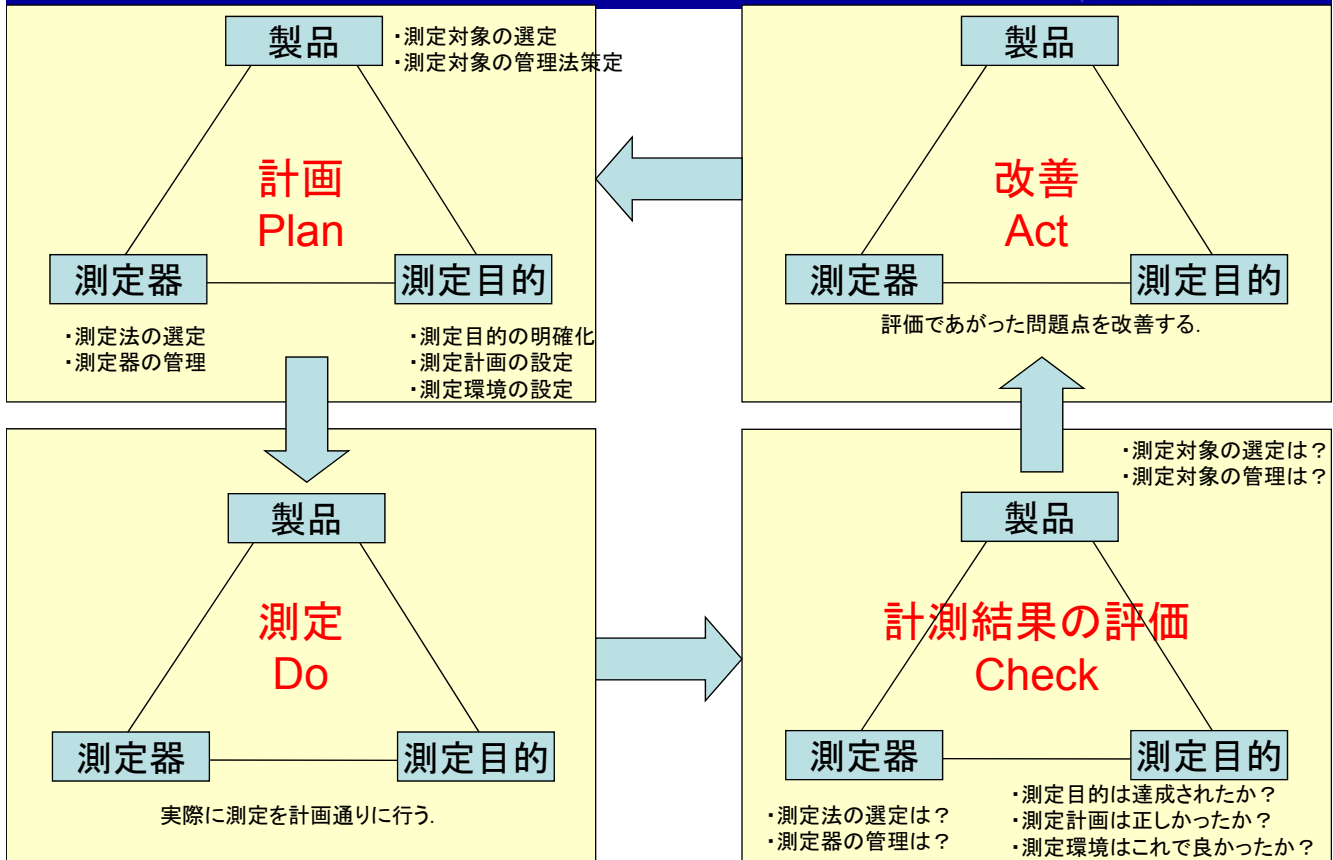
- 今回の実験に適用すると

	1	2	3	4	5回
装置A	(1) (午前)	(2) (午後)	(4) (午後)	(6) (午後)	(9) (午前)
装置B	(3) (午前)	(5) (午前)	(7) (午前)	(8) (午後)	(10) (午後)

これだと、午前・午後の実験回数が装置A, 装置Bでほぼ同数であるため、装置の違いを純粹に求めることができる。

## 計量管理の活動





この一連の活動を絶えず回し続け、よりよい測定を行い続けることが計量管理である。

### 製品

- ・測定対象の選定・・・サンプリング法は適切であるか？サンプリング誤差を把握しているか？
- ・測定対象の管理・・・測定を行うのに適した状態であるか？前処理は必要であるか？

### 測定器

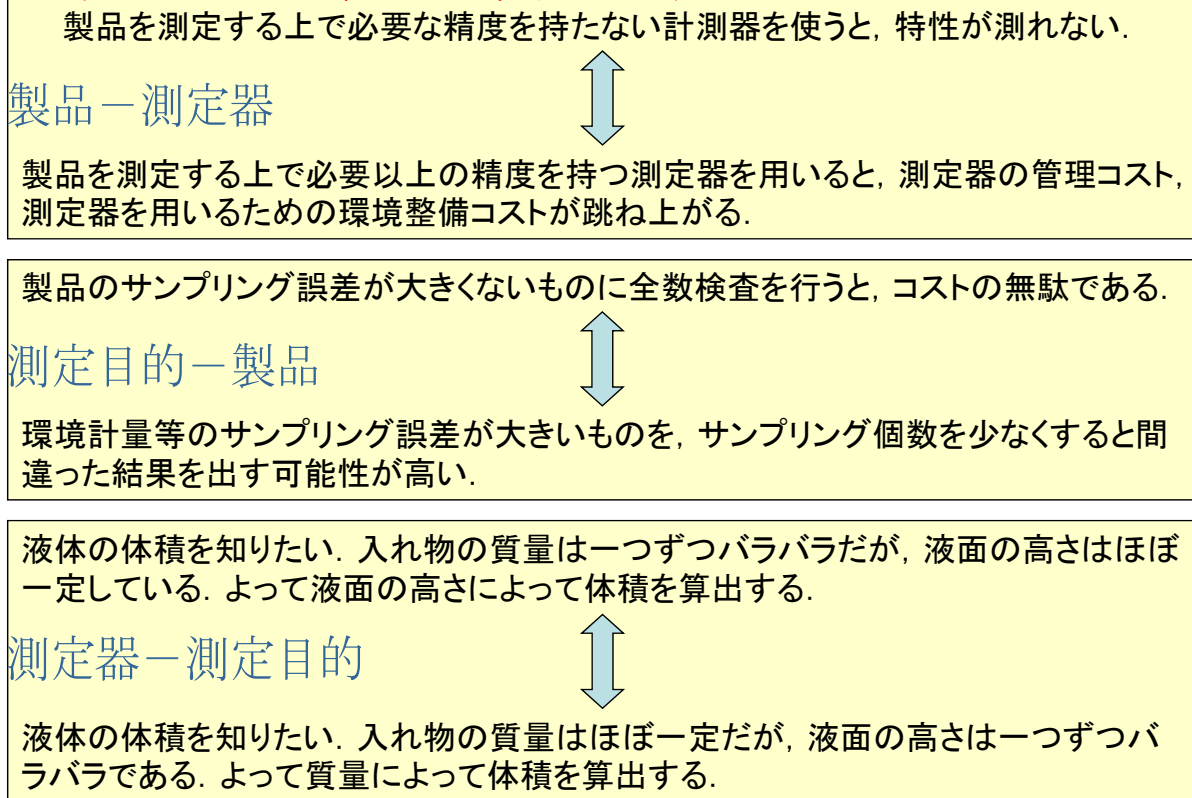
- ・測定法の選定・・・測定したい特性が測れるか？測定精度は必要十分であるか？測定レンジは必要十分であるか？測定速度は必要十分であるか？測定コストは許容範囲内か？
- ・測定器の管理・・・測定器は校正されているか？校正体系の管理は十分行われているか？

### 測定目的

- ・測定目的の明確化・・・どのような特性を測定したいのかがはっきりしているか？
- ・測定計画の設定・・・どのようにして測定値を得るのが明確であるか？取得したデータの処理方法が目的にあったものであるか？
- ・測定環境の設定・・・測定環境は製品にとっても、測定器にとっても適切なものであるか？

これらを決定するには、製品、測定器、測定目的について個々に考えても駄目である。すべてのバランスを取り、決定することが必要不可欠である。

## このバランスによって、このようなことが起こる。



計測管理を行うには、このバランス感覚が重要である。

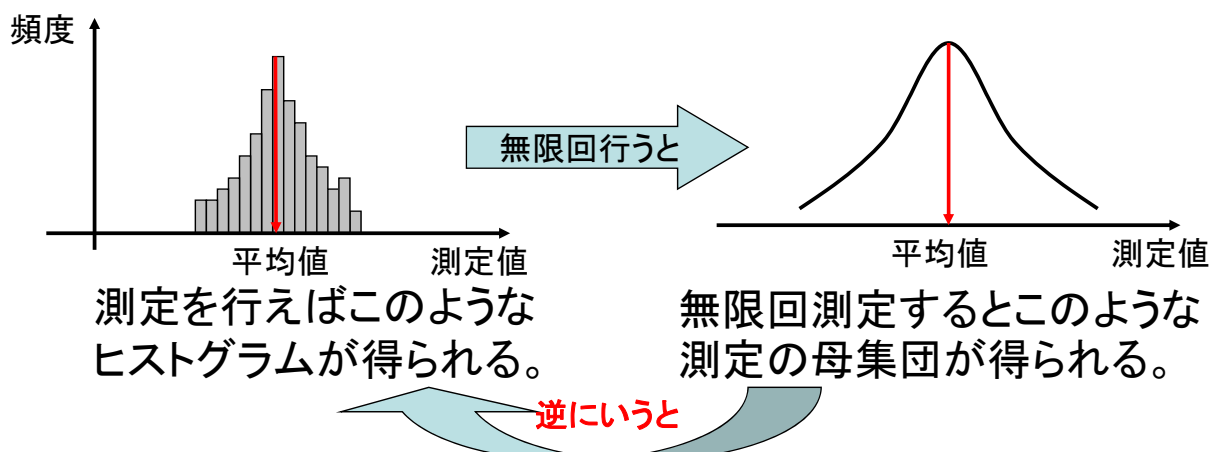
## 2: 統計の基本的事項について

### 統計学の初歩と不確かさへの応用

## 2-1: 測定と統計・統計の初歩

統計から見た測定とは？  
統計の基本的な手法について

## 測定と統計について

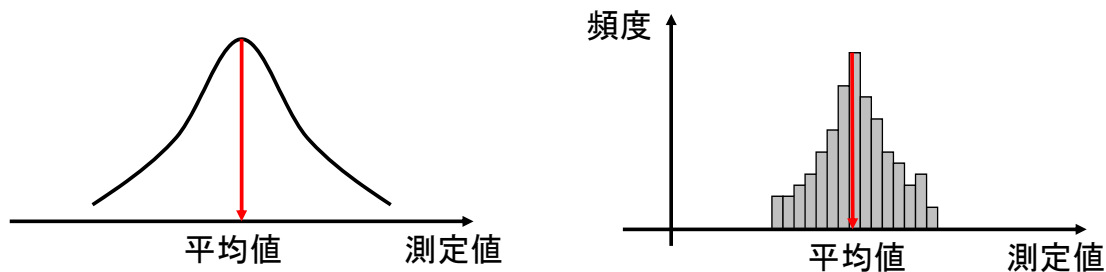


測定をしようと思ったときに、すでに母集団の形は決まっている。  
測定を行えばその母集団から値をひとつ取り出すということになる。

測定とは、その測定を無限回繰り返したとき得られる母集団からのサンプリングである。

# 母集団と標本について(1)

私たちは測定することによってなにを知りたいのだろうか？



本当ならこの母集団の性質を知りたい。しかし、母集団の性質も理想的な量であるので知ることはできない。

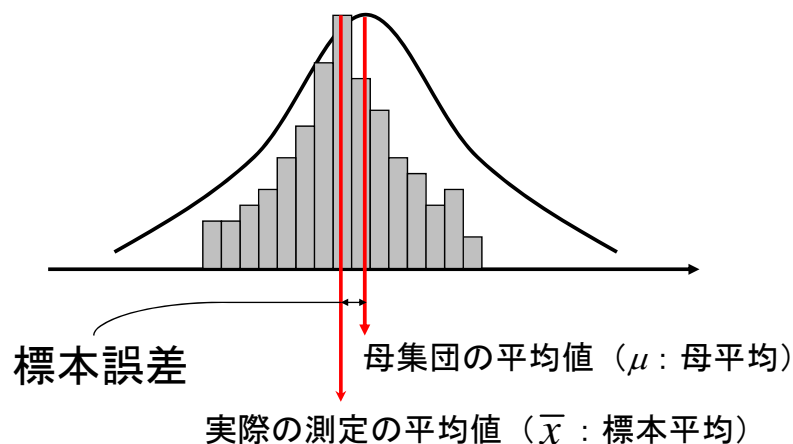
そこで、無限回測定する事は無理なので有限回の測定によって母集団の性質を推定する。

サンプルの性質を知りたいわけではない

一番知りたいもの **母集団の性質**

# 母集団と標本について(2)

一般的に代表値としてよく用いられている平均値を考えてみる。



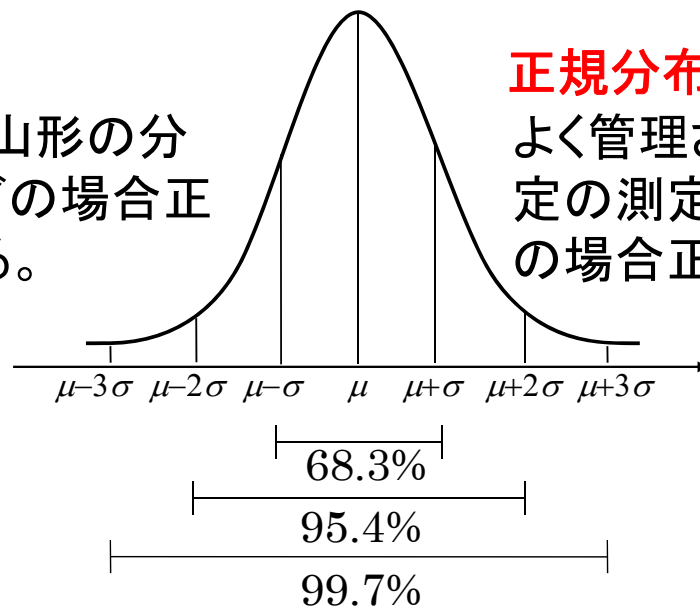
このように、本当に知りたい値である母平均は、サンプルから求められた標本平均とずれがある。

測定は、このずれを**標準偏差**で推定するために行う！

# 正規分布について

## 正規分布

よく見られる山形の分布はほとんどの場合正規分布である。



## 正規分布の性質

よく管理されている測定の測定値はほとんどの場合正規分布する。

$\mu \pm 1\sigma$ : 68.3%

$\mu \pm 2\sigma$ : 95.4%

$\mu \pm 3\sigma$ : 99.7%

の値が含まれる。

# 標準偏差とは

- 平均値からデータがどのくらいばらついてい  
るかの指標。
- 簡単に言うと、「ばらつきの平均値」である。
- 不確かさなどばらつきを扱うものは、ほとんどの  
場合この標準偏差を用いる。
- 標準偏差にも「母標準偏差」「標本標準偏差」  
があり、標本標準偏差によって、母標準偏差  
を推定する。

# 分散・標準偏差について

例:ある製品の質量測定(g)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
87.5	86.2	90.1	88.4	87.0

平均:  $\bar{x} = \frac{87.5 + 86.2 + 90.1 + 88.4 + 87.0}{5} = 87.84 \text{ g}$

平均値からの距離  
(偏差) 単位: g

- 87.5-87.84=-0.34 (平均値からの距離)<sup>2</sup>
- 86.2-87.84=-1.64
- 90.1-87.84=2.26
- 88.4-87.84=0.56
- 87.0-87.84=-0.84

単位: g<sup>2</sup>

- 0.1156
- 2.6896
- 5.1076
- 0.3136
- 0.7056

偏差の二乗和

単位: g<sup>2</sup>

8.9320

標本標準偏差

平方根  
単位: g

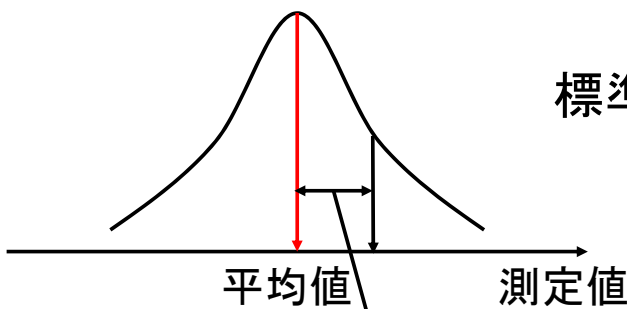
1.494

データの個数-1  
(自由度)で割る  
単位: g<sup>2</sup>

標本分散

2.233

## 平均値の標準偏差



標準偏差 = 測定値のばらつき

報告する値 = 平均値

ばらつき

必要なのは測定値のばらつき  
ではなく、平均値のばらつき!

平均値の標準偏差を求める必要がある。



# 平均値の実験標準偏差

サイコロを振って、出た目の平均値を求める。

1回目	
2回目	
3回目	
平均	

3回振った平均値

1回目	
2回目	
3回目	
4回目	
5回目	
6回目	
7回目	
8回目	
9回目	
10回目	
平均	

10回振った平均値

# 平均値の実験標準偏差の求め方

平均値の実験標準偏差と、最初に算出した実験標準偏差の間には以下の関係がある。

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}$$

標本平均の母標準偏差

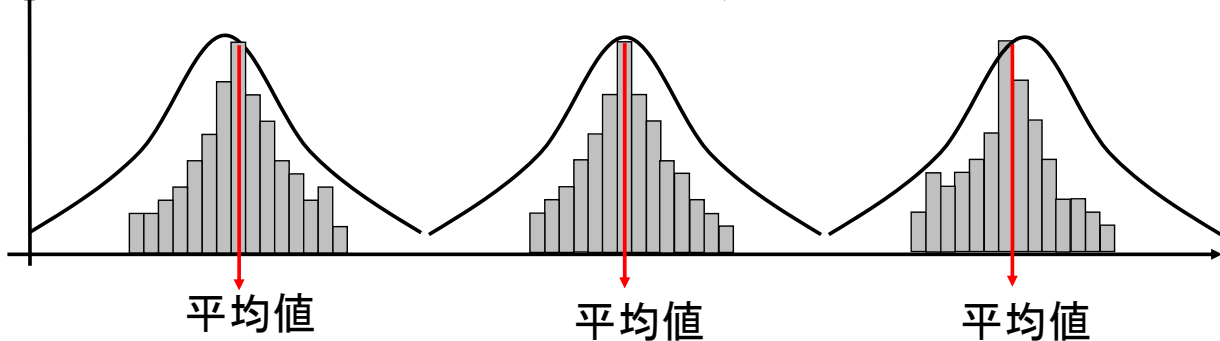
$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

標本平均の標本標準偏差

ここで、 $\sigma(\bar{x})$  は標本平均の母標準偏差、 $\sigma(x)$  はデータの母標準偏差、 $s(\bar{x})$  は標本平均の標本標準偏差、 $s(x)$  はデータの標本標準偏差、 $n$  は測定回数である。

## 母集団と標本について(3)

いったい平均値のばらつきとはなにを表しているのだろうか？



このように母集団からサンプルを取りだし平均値を算出すると値がばらつく。その平均値のばらつきを示す指標が、平均値の標準偏差である。

よって、測定値の平均値が、母集団の平均値の推定値。その推定値のばらつきの程度がこの標本平均の標準偏差である。

## 文字の使い方

- ・ギリシャ文字で表されるのが母数(母集団の性質)
- ・アルファベットで表されるのが標本の性質
- ・ギリシャ文字に“^”(ハット)をつけると推定値をそれぞれ表す。

$$\bar{x} = \hat{\mu}$$

$\mu$  母平均

標本平均を母平均の推定値とする

$\bar{x}$  標本平均

$\sigma^2$  母分散

$$\hat{\sigma}(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

$s^2(x)$  標本分散

標本平均の母標準偏差の推定値を標本平均の標本標準偏差とし、それはデータの標本標準偏差を $\sqrt{n}$ で割って算出される。

$\sigma$  母標準偏差

$s(x)$  標本標準偏差

## 2-2: 期待値と分散について

### 期待値とは

- 期待値・・・理想的にはこの値になるという値

サイコロは1-6の面を一つずつ持っている。  
また、その6つの面がでる確率はそれぞれ1/6。  
よって期待値は、

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \end{aligned}$$

# 期待値とは

- 一般的に書くと

$$E(x) = x_1P(x_1) + x_2P(x_2) + \cdots + x_nP(x_n)$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_iP(x_i)$$

期待値は,  $E(x)$ と書く.

## 例: ルーレット

- ルーレットは1-36までの数字と, 0と00の穴がある.  
また, 賭けた番号に玉が入ると36倍の配当が貰える.  
この時, 私は\$100をある番号に賭けました. 貰える配当の期待値はいくらか?

## 解答：ルーレット

- 穴の個数は1-36の穴と0と00の穴なので、38個
- また、どの穴も入る確率は同じ。  
よって、当たる確率は、 $1/38$ となる。

賭けた穴に玉が入った場合には、36倍の配当で\$3600貰える。その他の場合は、\$0となる。

## 解答：ルーレット

- 期待値は、

$$E(x) = 3600 \times \frac{1}{38} + 0 \times \frac{1}{38} + \dots + 0 \times \frac{1}{38}$$

$$E(x) = 94.74$$

よって、\$100賭けたときの期待値は\$94.74となる。  
つまり、この差額が親の取り分。

## 主な賭け事の期待値

- 競馬の期待値・・・100円賭けると75～80円前後
- 宝くじ・・・300円の宝くじで, 150円弱

統計的にいうと賭け事とは, この期待値との勝負!

## 期待値の性質

測定値 $x$ の母平均を $\mu$ とすると,  $\mu = E(x)$

$c$ が定数のとき,  $E(c) = c$      $E(cx) = cE(x)$

$x, y$ が確率変数のとき,  $E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$

$x, y$ が確率変数で  
互いに独立のとき,  $E(xy) = E(x)E(y)$

# 分散について

- 分散を期待値を用いて表すことを考える.

分散は平均値とデータとの差の二乗の平均値.  
よって,

$$\text{var}(x) = E\{(x - \mu)^2\}$$

# 分散の性質

$$c \text{ が定数のとき, } \text{var}(x + c) = \text{var}(x) \quad \text{var}(cx) = c^2 \text{var}(x)$$

$$x, y \text{ が確率変数で互いに独立のとき, } \text{var}(x \pm y) = \text{var}(x) + \text{var}(y)$$

## 平均値の分散

- 平均値の標準偏差は、データの標準偏差を  $\sqrt{n}$  で割ったものになった。  
つまり、データの分散を  $n$  で割ったものが、平均値の分散となる。

では、なぜそうなるのかを考える。

## 平均値の分散

$$\text{平均値: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$\text{上式の分散: } \text{var}(\bar{x}) = \text{var}\left\{\frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)\right\}$$

$$n \text{ は定数なので, } \text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \text{var}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$\text{各 } x_i \text{ が独立ならば, } \text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \{ \text{var}(x_1) + \text{var}(x_2) + \cdots + \text{var}(x_n) \}$$



# 平均値の分散

$\text{var}(x_1) = \text{var}(x_2) = \dots = \text{var}(x_n) = \sigma^2$  より,

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \{ \text{var}(x_1) + \text{var}(x_2) + \dots + \text{var}(x_n) \}$$

$$= \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{n^2} (n\sigma^2)$$

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

# 分散と自由度

- 分散を算出するときに、データの個数で二乗和を割るのではなく、(データの個数-1)の自由度と呼ばれるもので割った。

これはなぜか？

## 分散と自由度

- ではここで、二乗和を $n$ で割った分散を $s_1^2$ と置き、この期待値が何を表しているのか調べる.

$$s_1^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

## 分散と自由度

先程の式を変形  $s_1^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_i (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$

$$= \frac{\sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \sum_i x_i + \bar{x}^2 \sum_i 1}{n}$$

$$= \frac{\sum_i x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_i x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_i x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

この式の期待値を考える.

## 分散と自由度

$$E\left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_i \{E(x_i^2)\} - E(\bar{x}^2)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \text{var}(x) &= E\{(x_i - \mu)^2\} = E(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) \\ &= E(x_i^2) - 2\mu E(x_i) + \mu^2 \\ &= E(x_i^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\ &= E(x_i^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \sigma^2 = E(x_i^2) - \mu^2$$

$$E(x_i^2) \text{ は, } E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

## 分散と自由度

また同様に,

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{x}) &= E\{(\bar{x} - \mu)^2\} = E(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu + \mu^2) \\ &= E(\bar{x}^2) - 2\mu E(\bar{x}) + \mu^2 = E(\bar{x}^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\ &= E(\bar{x}^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

ここで、平均値の分散は、

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ であるので, } E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \text{ となる.}$$

## 分散と自由度

$$E(s_1^2) = \frac{1}{n} \sum_i \{E(x_i^2)\} - E(\bar{x}^2) \text{ に, } E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2 \text{ と}$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \text{ を代入.}$$

$$\begin{aligned} E(s_1^2) &= \frac{1}{n} \sum_i (\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= \frac{1}{n} (n\sigma^2 + n\mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$E(s_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \text{ となる.}$$

よって,  $s_1^2$  は母分散の不偏推定量ではない!!  
(不偏推定量...母数をかたよりなく推定している量)

## 分散と自由度

よって,  $E(s_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$  であるなら,

$$E\left\{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right\} = \sigma^2$$

となることは自明.

よって, 分散を算出するときには,  $n$  で割るのではなく,  $n-1$  で割る.

## 分散と自由度

- では母平均 $\mu$ が分かっている標本平均を用いずに分散を算出したときのことを考える。
- 二乗和を $n$ で割った分散を $s_2^2$ と置き、この期待値が何を表しているのか調べる。

$$s_2^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n}$$

## 分散と自由度

先程の式を変形  $s_2^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \mu^2$

この式の期待値を考える。

$$E\left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \mu^2\right) = \frac{1}{n} \sum_i \{E(x_i^2)\} - \mu^2$$

$E(x_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$  を代入

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \mu^2\right) &= \frac{1}{n} \sum_i (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \frac{1}{n} \cdot n (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

よって、 $s_2^2$ は母分散の不偏推定量である！！

## 2-3: 平均値の標準偏差と不確かさ

## 平均値の標準偏差と不確かさ

- 例: 測定器A1,A2,A3という3台の機械がある. この測定器が異なることによって現れるばらつきを評価した.
- 実験法は, A1,A2,A3の3水準で繰返しを各10回行った.
- その結果,

$$\hat{\sigma}_A = 0.0124 \text{ mm}$$

$$\hat{\sigma}_e = 0.0142 \text{ mm}$$

を得た.

# 平均値の標準偏差と不確かさ

- 平均値の不確かさを求める.
- 測定器は3水準
- 繰返しを各10回

$$u_A = \frac{0.0124}{\sqrt{3}} = 0.00716 \text{ mm}$$

$$u_e = \frac{0.0142}{\sqrt{10}} = 0.00449 \text{ mm}$$

これで本当によいだろうか？

# 平均値の標準偏差と不確かさ

- この実験は不確かさを求めるために行ったものである.
- よって、普段の測定とは測定方法が異なっている.

普段は、  
装置は3台のうちどれか1台だけを用いて、  
繰返しは5回で行っている。  
とすると、

# 平均値の標準偏差と不確かさ

装置は、3台のうちの1台しか用いないので、

$$u_A = \hat{\sigma}_A = 0.0124 \text{ mm}$$

繰返しは普段は5回しか行わないので、

$$u_e = \frac{0.0142}{\sqrt{5}} = 0.00635 \text{ mm}$$

となる。

不確かさ評価を行ったときの実験回数が問題なのではなく、

普段の測定で行っている実験回数が重要！！

普段の測定で値付けしたものに対して不確かさをつけるので、  
このようにしなければならない。

# 平均値の標準偏差と不確かさ

週が異なることによるばらつき  $\hat{\sigma}_A = 0.1909$

日が異なることによるばらつき  $\hat{\sigma}_{B(A)} = 0.1077$

繰返しによるばらつき  $\hat{\sigma}_{C(AB)} = 0.1124$

これらの推定された標準偏差から不確かさを算出することを考える。  
実際の測定はある日に5回繰返してその平均値を測定結果として  
報告する、という前提をおくと、週が異なることによるばらつきと日  
が異なることによるばらつきは平均化されないで、そのまま1つず  
つ不確かさに含まれる。また、繰返しは5回なので、繰返しによるば  
らつきは $1/\sqrt{5}$ の大きさだけ含まれる。よって、

$$u(x) = \sqrt{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_{B(A)}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{C(AB)}^2}{5}} \quad \text{となる。}$$



## 4-3: プールされた標準不確かさ

## プールされた標準偏差

- ・ある製造ラインで測定器を制作している。
- ・制作された測定器は、3回繰り返し測定が行われ、校正されている。
- ・このとき、どの測定器も繰り返しのばらつきはだいたい同じであるが、平均値が少し異なる。よって、その平均値が社内規格より外れた場合には調整し直して、出荷している。

このような場合の繰り返しの不確かさはどのようにして求めればよいか？

# プールされた標準偏差

通常の方法では、  
3回の繰り返し測定の結果を、  
 $x_1, x_2, x_3$ とすると、

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} \quad u(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2}{3-1}} / \sqrt{3}$$

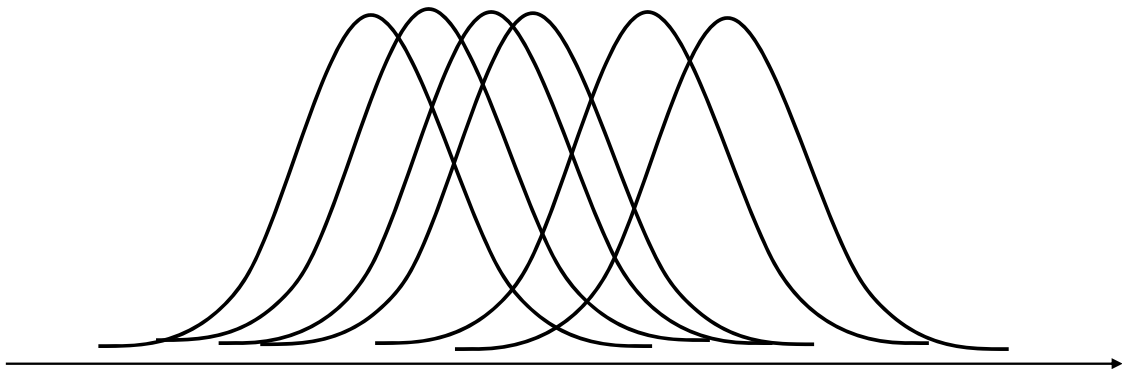
として求める。しかし、 $s(x)$ は3回の測定でのみ求められているので非常に推定精度の低い標準偏差となってしまう。

ここで前提として、

「どの測定器も繰り返しのばらつきはだいたい同じであるが、平均値が少し異なる。」

をうまく用いることを考える。

# プールされた標準偏差



上図のように、これまでに取得したデータは、平均値は異なるが、ばらつきの大きさは変わらないということを前提とする。このとき、ばらつきは変わらないのでこれら全データを利用して分散を算出する方法を考える。

## プールされた標準偏差

各日による二乗和を算出する。

$$S_i = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad i\text{日目の二乗和}$$

更に全部足し合わす

$$S_{\text{Pool}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

二乗和が計算できたので自由度で割り、分散を算出する  
自由度は、全データ数が、 $mn$ 個あるが、二乗和を計算するために  
平均値を $m$ 個用いているので、 $mn - m = m(n - 1)$ となる。よって分散は

$$S^2_{\text{Pool}} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{m(n-1)} \quad \text{となる。ちなみにこの分散は分散分析を行った際の誤差項の分散と等しい。}$$

## プールされた標準偏差

今までに500台の測定器を作成し、その校正を行っているため、  
それらの測定値は非常に数多くある。しかも、平均値は異なって  
もばらつきはほぼ変わらないのであれば、二乗和(分散の分子  
部分)を、

$$\begin{aligned} S_{\text{Pool}}(x) &= \sum_{j=1}^3 (x_{1j} - \bar{x}_1) + \sum_{j=1}^3 (x_{2j} - \bar{x}_2) + \cdots + \sum_{j=1}^3 (x_{500j} - \bar{x}_{500}) \\ &= \sum_{i=1}^{500} \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \end{aligned}$$

として求める。

このときの自由度は、全データ数が $500 \times 3 = 1500$ 個、二乗を算出するために用いた平均値の個数は、作成された測定器の個数と同じであるから、500個とすると、

$$f = 1500 - 500 = 1000$$

となる。

## プールされた標準偏差

よって、二乗和を自由度で割れば分散が算出できるので、

$$s^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{500} \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{1000}$$

となる。これは、作成された測定器の測定データのばらつきであるので、3点の平均値の不確かさは、

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{500} \sum_{j=1}^3 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{1000}} / \sqrt{3}$$

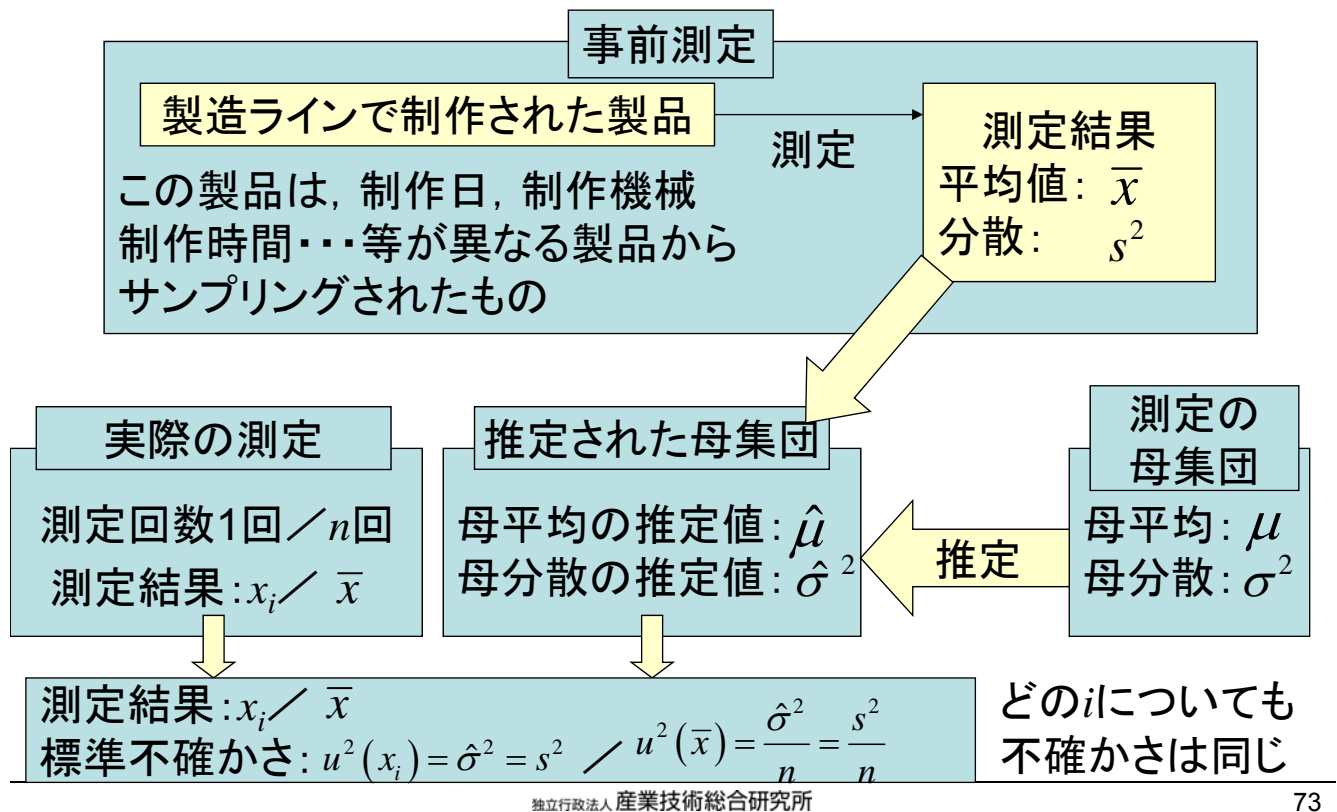
で算出できる。

## GUMでの言及

4.2.4 統計的管理状態に保たれている、はっきりと素性の知られた測定に対しては測定を特徴づける合成またはプールされた分散の推定値  $s_p^2$ （またはプールされた実験標準偏差  $s_p$ ）が利用できることがある。このような場合、測定量  $q$  の値が独立な  $n$  個の観測値から決められるときには、観測値の相加平均  $\bar{q}$  の実験分散は  $s^2(q_k)/n$  よりも、 $s_p^2/n$  によってより良く推定され、標準不確かさは  $u = s_p / \sqrt{n}$  となる。

統計的管理状態に保たれている・・・不特定多数の顧客から試験依頼を受け付けるのではなく、自社で生産した計測器を試験するような場合！

# 事前の分析による不確かさ評価



73

## 終わりに

統計的手法は、データに含まれる情報を効率よく取り出すためのツールである。よって、元のデータに情報が含まれていないのであれば、どんな素晴らしい統計的手法を用いても知りたいことを知ることはできない。

つまり、統計的手法だけを理解していても本当に知りたい情報は取り出すことはできない。対象としている測定について十分な知識を身に付けていることが重要である。

統計は万能ではない。よって統計の知識を身に付けるとともに、その統計を通して対象としている測定を見直し、その測定についての新たな、そして今まで見過ごしがちであった知識を再確認していただきたい。