

工業用抵抗温度計の補間法に関する考察

櫻井 弘久*, 田村 収*

(平成18年11月27日受理)

Interpolation Methods for Industrial Grade Resistance Thermometers

Hirohisa SAKURAI, Osamu TAMURA

Abstract

The interpolation methods of industrial grade resistance thermometers are studied for precise thermometry. Comparing the interpolation equations calculated by the method of least squares and by the method using a deviation function from the Callendar-van Dusen equation, the former method is shown to be superior to the latter. The propagation of the uncertainties at the calibration points through the interpolation equation is discussed shortly.

1. はじめに

物理量間の関係を式で表現するとき、その関係が理論的に与えられている場合と必ずしも理論的には与えられていないときがある。例えば、前者は理想気体の状態方程式や熱雑音のナイキストの式などである。また、後者は、いくつかの物理量が複雑に関係している場合に相当し、金属の抵抗と温度の関係式などが典型的な例である。

白金抵抗温度計の抵抗と温度の関係など複雑な特性を持つ物性量の関係式を求めるには、多項式やある種の関数で展開して、係数を最小二乗法で決める方法が用いられている¹⁾。逆に、これ以外の方法で関係式を決めるには、

- ・物理的あるいは物性的な根拠がある。
- ・実測値での検証がなされている。

のいずれかが必要である。

後者の典型的な例が国際温度目盛（1990年国際温度目盛、以下ITS-90と略す）での白金抵抗温度計の補間式である。この補間には温度計間で共通の基準関数と呼ばれる関数と温度計ごとに異なる偏差関数と呼ばれる関数とが使われている²⁾⁴⁾。この手法には物理的な根拠はなく、実測値を基に採用されている。従って、温度領域によって補間式が異なり、複雑な式となっている。基準関数、偏差関数に類似した方法を一般の温度計の補間に使うには、実験的な検証が必要になる。

一方、精密な温度測定をするとき、白金抵抗温度計を用いることが多い。特に、ITS-90に使われている標準用の白金抵抗温度計は精密測定に適している。しかし、取り扱い方法が複雑である⁵⁾ことや形状などのため、これに代わって、工業規格品の抵抗体Pt100（JIS C 1604測温抵抗体⁶⁾）や同種類品が精密な温度測定に使われることが多い。

工業用に製作・販売されているPt100は規格の範囲で使用するならば、非常に便利で、信頼性の高い温度測定に利用することができる。本来、規格品であるPt100は、ユーザーが校正する必要は全くないし、規格には校正という概念もない。しかし、このPt100を日本工業規格（JIS）とは異なる方法で使うならば、その精度管理や取り扱い法については、使用者が自ら責任を負うことになる。特に問題になるのが、高精度での測定に使うときの補間法、校正法および *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*⁷⁾（以下GUMと略す）に従った不確かさの評価法である。

これらの温度計に関して、工業規格品としての補間法の報告はある⁸⁾¹⁰⁾が、精密測定に使うための補間法、特に、それに伴う不確かさや校正法については、ほとんど議論がなされていない。特に誤りやすい点は、

1. Pt100を定点等で校正する。
2. JISに採用されている規準関数をITS-90の基準関数と同列に扱い、偏差関数で補正する。

などである。これらの操作を行うことで、JISの規格外の温度計となり、例えば、JISの規格の一つである許容差は

* 計測標準研究部門 温度湿度科

保証されなくなる。

Pt100をJISの規格外の精密測定に使うには、その特性式から検討する必要がある。このためには抵抗-温度関係のデータが必要である。今回、山里産業株式会社、標準室の協力を得て、Pt100の中温域のデータを提供して頂いた。ここでは、このデータを基にPt100の補間法について考察する。

最初に抵抗温度計の実測値を例に、多項式展開したときの次数と残差の分散との関係について調べる。次に、補間式を作る際に使用するデータの数について検討する。また、実測値を基に、基準関数と偏差関数の限界についても検討しておく。さらに、補間式と校正点の不確かさの伝搬についても検討する。

測定に使用された温度計はPt100で、シリアル番号、1045938、1045940という2本である。この温度計について、-40℃から250℃の温度域で抵抗と温度のデータが与えられている。

なお、白金抵抗温度計の特性はその取り扱い法に大きく依存するが、ここでは補間式のみについて考察する。

2. 補間式

抵抗と温度の関係を表す式はいろいろ提案されている。ここでは、最も単純に、多項式を採用する。多項式の係数やその次数を決定するための抵抗と温度の関係を表1にまとめておく。ITS-90に従い校正した標準用の白金抵抗温度計を基準に、2本の工業用温度計Pt100を比較校正した結果である。また、この表で u_i は校正の標準不確かさであり、温度で表記してある。

最初に、これらのデータを使い、最小二乗法の有効性を確認しておく。次に、校正点の数と残差の関係を見ておく。最後に、これらの結果と偏差関数を使った方法とを比較する。

2.1 最小二乗法

最小二乗法を適用するための実験式は任意性があり、通常、取り扱いやすい式が使われる。ここでは、温度 t と抵抗 $R(t)$ の関係式（以下、補間式という）として、温度 t の n 次の多項式とする。多項式を一般化して次のように書いておく。

$$R(t) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(t) \quad (1)$$

ここで、 $P_k(t)$ は t の k 次の多項式とし、係数 a_k を最小二乗法で決定する。

表1 2本の温度計の校正值

i	$t_i/^\circ\text{C}$	1045940		1045938	
		R_i/Ω	$u_i/^\circ\text{C}$	R_i/Ω	$u_i/^\circ\text{C}$
1	-40	84.1874	0.007	84.1945	0.007
2	-30	88.1417	0.007	88.1501	0.007
3	-20	92.0826	0.007	92.0935	0.007
4	-10	96.0129	0.007	96.0238	0.007
5	0	99.9324	0.007	99.9428	0.007
6	10	103.8370	0.008	103.8515	0.008
7	20	107.7306	0.008	107.7450	0.008
8	30	111.6115	0.008	111.6280	0.008
9	40	115.4815	0.008	115.4984	0.008
10	50	119.3399	0.008	119.3571	0.008
11	80	130.8412	0.012	130.8621	0.012
12	100	138.4523	0.012	138.4762	0.012
13	120	146.0131	0.013	146.0362	0.013
14	180	168.4210	0.013	168.4491	0.013
15	200	175.7963	0.013	175.8301	0.013
16	220	183.1262	0.015	183.1591	0.015
17	250	194.0346	0.015	194.0703	0.015

最小二乗法では、 m 個の測定点 (R_i, t_i) ($i = 1, 2, \dots, m$) に対して、残差の二乗和 S_n ,

$$S_n = \sum_{i=1}^m w_i \left(R_i - \sum_{k=0}^n a_k P_k(t_i) \right)^2 \quad (2)$$

を最小にするように、係数 a_k を決定する。 w_i ($i = 1, 2, \dots, m$) は重みで、各測定点の不確かさ u_i を使って、

$$w_i = 1 / (u_i (dR(t) / dt)_{t=t_i})^2 \quad (3)$$

とする*。

具体的には、 a_k に関する $n+1$ 個の連立方程式

$$\sum_{i=1}^m w_i R_i P_i(t_i) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^m w_i P_i(t_i) P_k(t_i) \right) \quad (4)$$

から a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) を決定する。

関数 $P_k(t)$ の選び方には自由度がある。ここでは、議論を簡単にするために、特に断らない限り、抵抗と温度の関係式を次のような単純な級数に展開することとする。

$$P_k(t) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ (t / ^\circ\text{C})^k & k > 0 \end{cases} \quad (5)$$

2.2 次数と分散の関係

級数展開した補間式を使うとき、採用する展開式の次数を適切に決める必要がある。ITS-90や1968年国際温度目盛で規定している白金抵抗温度計では特性が揃ってい

* 表の不確かさ、 u_i が温度で与えられているので、形式的に抵抗の不確かさに換算して重みとする。しかし、この重みを計算するには関数が決まっている必要があり、このままでは計算できない。例えば、最初に $w_i = 1$ として計算し、得られた関数を用いて式(3)を使い、再び最小二乗法で係数を計算する。

るため、典型的な1本の温度計を使って次数を決めることで、ほかの温度計の次数も推定できる。しかし、工業用として作られているPt100を規格外の方法で使うには、使用者の責任で個々の温度計ごとに適切な展開次数を決める必要がある。

最初に表1を使って展開次数を決める方法の一例を示す。展開式の次数も抵抗と温度の校正結果を使って推定する。

処理法としては、二つの正規分布の分散が同一かどうかを判定するF-分布を利用するのが分かりやすい。F-分布を利用するいろいろな処理法があるが一例は、 $n-1$ 次式での残差の分散 σ_{n-1}^2 と n 次式の残差の分散 σ_n^2 とを比較する方法である。例えば、

$$F_n = \frac{\sigma_{n-1}^2}{\sigma_n^2} \quad (6)$$

と分散比 F_n を定義する。つまり、 $F_n \approx 1$ なら、二つの残差の分散が等しいことになり、多項式の次数は $n-1$ 次で十分で n 次式まで展開する必要がないと判定する。実際のデータを使って、級数の次数 n に対する F_n を計算すると、図1のようになる。

この図で、例えば、 $n = 3$ の値 F_3 は、5.88 (温度計: 1045938) および7.66 (温度計: 1045940) となる。一方、上記データを使ったとき、2次式の分散と3次式での残差の分散が99%の確かさで一致すると仮定したときの F-分布の数表の値は約3.76である。この値は上記の F_3 の値より小さい。つまり、2次式の分散より3次式の分散の方が小さいことが有意であり、2次式から3次式と次数を上げる意味があることを示している。

一方、両方の温度計とも F_4 の値は約1.03となっている。3次式の残差の分散と4次式の残差の分散が99%の確かさで一致するというときのF-分布の数表の値は約3.96であり、この値は、 F_4 の値より大きい。つまり、4次式の分散と3次式の分散とは有意な差がなく、4次式にする必要がないことを示している。

実際に、2次式での残差は図2となっており、残差は系統的にうねっている。一方、3次式での残差は図3となっており、ほぼランダムになって、これ以上次数を上げる必要がないことが分かる。表1の温度計の場合、抵抗と温度の関係式を式(1)としたとき3次式が最適であることが分かる。

ここでの2本の温度計は3次式であったが、一般のPt100が3次式であるという保証は全くない。個々のPt100で特性が異なるため、図1のような計算を行って、個々の温度計ごとに次数を決める必要がある。

なお、F-検定に使えるデータは正規分布していることが仮定されている。一方、GUM に従って処理された校正値の不確かさには正規分布以外の要因が含まれている。従って、最小二乗法を適用しても、その残差が正規分布してない可能性があり、厳密な意味では F-検定を利用することができない。しかし、温度計の特性式では、経験的に多くの場合、残差は正規分布で近似できる。むしろ、残差が極端に正規分布からずれている場合には、校正データの見直しなどが必要になる。ここでは、残差が正規分布するものとして、次数を決める一つの例を示した。

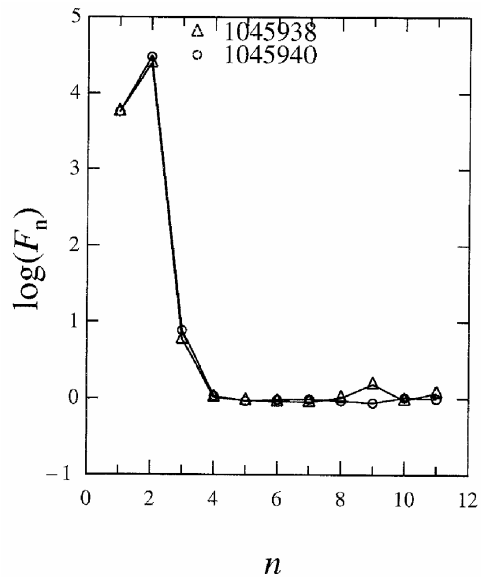


図1 級数展開したときの次数 n とそのときの分散比 F_n との関係

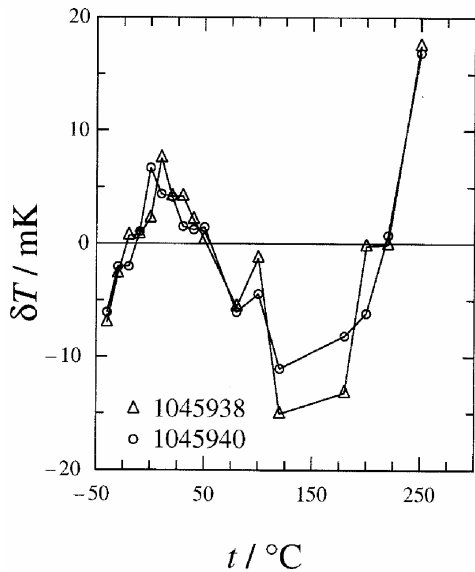


図2 2次式での残差の様子。系統的なうねりが見られる。

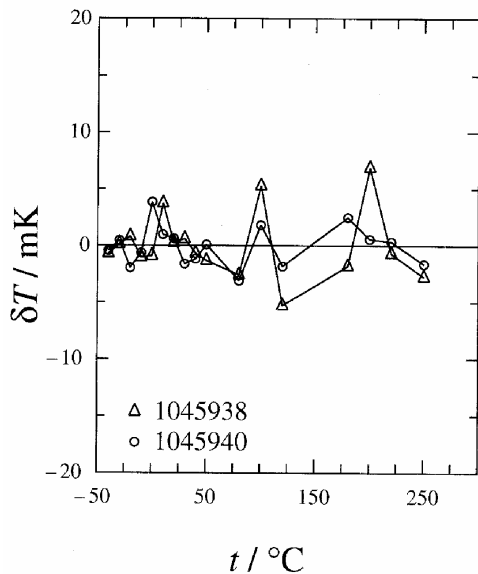


図3 3次式での残差の様子. ほぼランダムなばらつきとなっている.

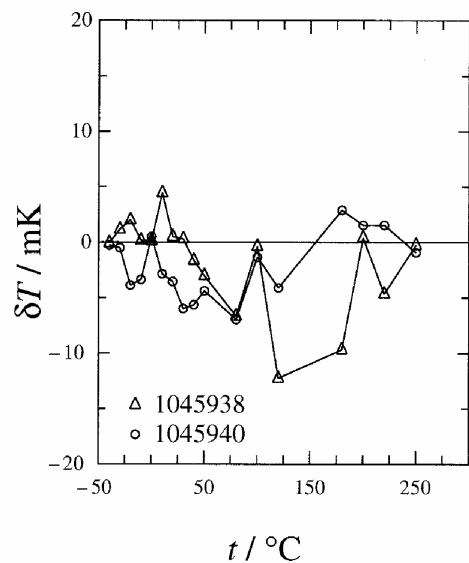


図4 5点の校正点で3次式の係数を決めた式からの残差

3. 校正点の数

白金抵抗温度計の補間式として単純な級数展開を用いた。しかし、最小二乗法でこの補間式を決めるには多数の校正点が必要になる。温度計を使うときに、常に多数点で校正しなければならないことは望ましいものではない。特に、基準温度計など定期的に校正が必要な温度計では、最小限の校正作業が望ましい。ここでは、校正点の数を検討する。

上記の2本の温度計に限れば、最小二乗法の結果から3次式で十分であることが分かった[†]。つまり、校正式は、

$$R(t) = a_0 + \sum_{k=1}^3 a_k (t/^\circ\text{C})^k \quad (7)$$

である。特性式がこの3次式であるとき、どの程度の校正点が必要かを検討する。

・5点での校正

校正する温度として、 -40°C 、 0°C 、 100°C 、 200°C 、 250°C とする。この5点で3次式の係数 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 を決める。そのときの残差が、多数点で決めた場合と、どの程度の違いがあるかを調べる。5点の校正点から最小二乗法を用いて決めた係数を使った式から、全部の校正点での残差を調べると図4となる。

全部の測定点を使って最小二乗法を適用したときの残差の標準偏差は1045938で2.8 mK、1045940で1.7 mKであったのに対し、5点校正での残差の標準偏差は、

それぞれ4.6 mKおよび3.6 mKと多少大きい。表1の測定の不確かさの1/2程度である。全部の校正データが必ずしも必要というわけではなく、5点で十分であることを示している。

・4点校正

さらに校正点を減らし、最小二乗法を使わずに、4点で校正してみる。つまり、特性式の4つの係数を4つの校正点から決める。この場合、どの校正点を選ぶかには任意性がある。ここでは、3点は常識的に -40°C 、 0°C 、 250°C とし、4点目として、 100°C と 200°C を選んだ時の違いを比較してみる。

まず、 100°C を校正点に選んだときの各測定点の残差は、図5となる。一方、 200°C を4点目の校正点としたときは、図6となる。これら結果はどちらの校正点を選んでも大差はないことが分かるし、さらに、5点で最小二乗法を使っても、4点で係数を決めても大差はないことが分かる。いずれも測定の不確かさの範囲での残差である。

ここでの結果は、補間式の次数が適切に決まっており、また、各校正点での測定精度が確保できていれば、多数の校正点が必要ではないことを示している。

これは温度計の管理という点で非常に便利な点である。一度特性を調べる必要はあるが、展開次数が決まれば、管理に必要な校正点の数を制限できる。特に、ワーキングスタンダードなどのような定期的な校正による管理が必要となる温度計には好ましい点である。

しかし、この場合、校正が常に正確に行われているということが前提である。校正が正確に行われていれば余

[†]同じ温度計でも次数は測定精度と関係している。さらに高精度が必要になれば、さらに精密なデータセットが必要になり、次数も上げる必要があるかもしれない。

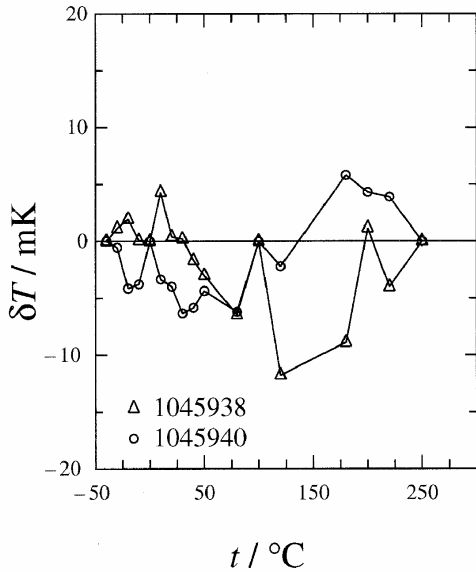


図5 4点の校正点で3次式の係数を決めた式からの残差 (-40 °C, 0 °C, 100 °C, 250 °Cが校正点の場合)

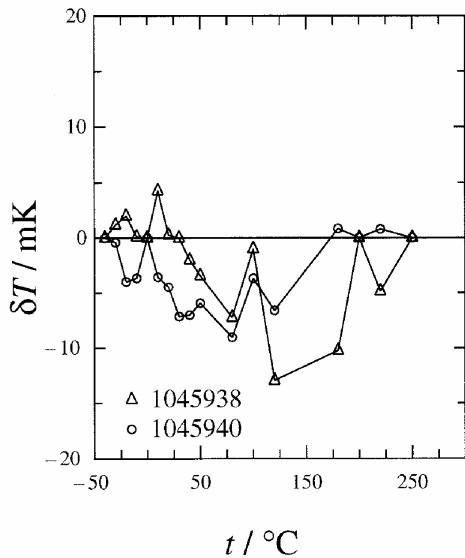


図6 4点の校正点で3次式の係数を決めた式からの残差 (-40 °C, 0 °C, 200 °C, 250 °Cが校正点の場合)

分な校正点が必要ないともいえるが、校正という作業では、偶然に起こる校正誤差を常に考えておく必要がある。このためには、今回の2本の温度計でも、5点校正で最小二乗法を適用し、その残差が測定精度より大きいときには、何か偶発的な誤りがあったと分かるようにした方がよい。

4. 偏差関数を使った補間式

次に、一つの試みとして、基準関数と偏差関数を使って補間式を作ってみる。基準関数、偏差関数という用語は一般的ではなく、国際温度目盛 (ITS-90など) の白金抵抗温度計の温度と抵抗 (比) の関係を表すのに使われている。

一般に偏差関数は次数の低い多項式を使い、この多項式の係数を温度計ごとに決める。この行為は、基準関数の係数のいくつかを温度計ごとに調整することに相当する。つまり、温度計の校正点の数に応じて、基準関数の低次の多項式の係数を温度計ごとに変え、残りの係数は変更しないで使う。このため、この方法が有効なのは、実際の温度計の特性が基準関数で近似できる場合である。実際の温度計で考察してみる。

4.1 JIS規準関数からの偏差関数

最初に、基準関数としてJISの規準関数を使って、この規準関数からのずれを偏差関数で補間してみる。多くの表示器付の計測器はこの規準関数を利用している。

基準関数・偏差関数を使う場合、抵抗で式を表すと、個々の温度計の抵抗を考慮するための定数が必要となるため、抵抗比で表した方が便利である[‡]。まず、基準関数と偏差関数を使う常套手段として、0 °Cの抵抗 R_0 を使って、抵抗比、

$$W(t) = R(t)/R_0 \quad (8)$$

を定義する。また、JISの規準関数は、Callendar-van Dusenの式と呼ばれ、

$$W_{\text{JIS}}(t) = 1 + A(t/^\circ\text{C}) + B(t/^\circ\text{C})^2 + C(t/^\circ\text{C})^3(t/^\circ\text{C} - 100) \quad (9)$$

である。係数 A, B, C は与えられている。なお、 $t > 0$ °Cでは $C = 0$ である。

・1次の偏差関数

最初は偏差関数 $\Delta W(t)$ としては1次式、

$$\Delta W(T) = a(t/^\circ\text{C}) \quad (10)$$

とする。補間式は、

$$W(t) = W_{\text{JIS}}(t) + \Delta W(t) \quad (11)$$

である。係数 a を校正点250 °Cでの抵抗値の測定から決める。校正点は250 °C一点とする。2本の温度計で、この式からの残差は図7となる。

表1の不確かさとこの図の残差、または最小二乗法

[‡] 抵抗で基準関数を作ると温度計による抵抗の違いを常に考慮する必要があり式が複雑になる。ITS-90で水の三重点での抵抗で規格化した特性式を採用している目的もここにあり、数学的処理の便法である。ITS-90でも基準関数を使わない補間式、例えば、気体温度計、放射温度計の領域では規格化していない。抵抗比が特別な意味を持っているのではなく、数学処理上の都合である。

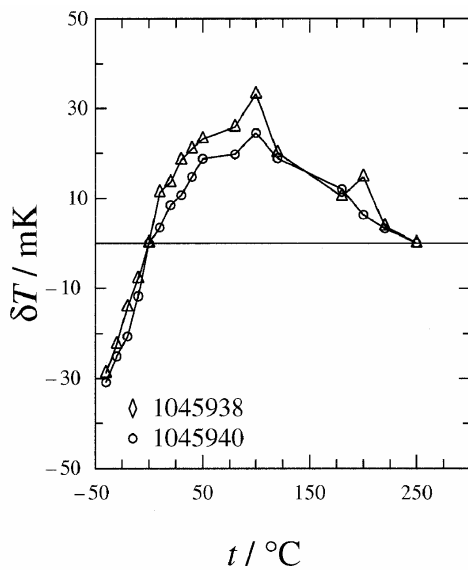


図7 JISの規準関数を基準関数として、偏差関数を1次式としたときの残差。校正温度は250°Cである。

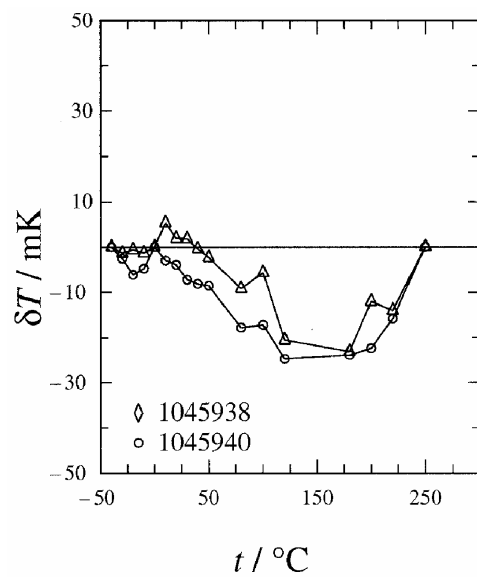


図8 JISの規準関数を基準関数として、偏差関数を2次式としたときの残差。校正温度は-40°Cと250°Cである。

で得られた残差, 2~3 mKと比べると, この方法は補間式として適していないことが分かる. 特に低温側は大きくずれている. 低温側がずれている原因は, 校正温度が, 0 °Cと250 °C であり, 低温側の調整が全く行われていないためである.

・2次の偏差関数

低温側を調整するために, 偏差関数を2次式にしてみる. 偏差関数は,

$$\Delta W(t) = a(t/^\circ\text{C}) + b(t/^\circ\text{C})^2 \quad (12)$$

であり, この式の係数 a, b を250 °Cと-40 °Cでの校正点から決める. 残差は図8となる. 低温側は改善されているが, 中温域の膨らみは約30 mKに達し, 表1の不確かさ, 13 mK, より2倍程, また, 最小二乗法での残差の10倍程度と大きくなっている. 2次式の偏差関数でも, 補間式としては適していないことが分かる.

2本の温度計は, JISの規格品として製作され, 規格を満足しているにもかかわらず, 前節で求めた最小二乗法での残差に比べ, 1次および2次の偏差関数ではほとんど補間できていないことが分かる. JISの規準関数を基準関数として, 偏差関数を使うという補間法は, 精密測定の目的には適していないことを示している.

上記の偏差関数で a, b などを決めることは, JISの規準関数(9)の係数 A, B を調整することに相当する. 図7, 図8の結果は, この操作で測定精度が向上することは望めないということを示している.

4.2 基準関数の改良

次に, 最小二乗法で得た一つの温度計の3次式を基準の関数として, 他の温度計に対して1次式の偏差関数を作って, その有効性を調べてみる. ここでは, 一例として1045940の温度計の3次式を基準関数として, 1045938の温度計の特性を偏差関数で表すことにする.

温度計1045940の特性を最小二乗法で求めた補間式を $W_{\text{ref}}(t)$ として, 1045938の温度計の補間式を

$$W(t) = W_{\text{ref}}(t) + \Delta W(t) \quad (13)$$

で表す. 偏差関数は式(10)と同じで,

$$\Delta W(t) = a(t/^\circ\text{C})$$

である. この式の係数, a を校正点での抵抗値測定から決定する. 係数を決めるために, 校正点として最も高い温度, 250°Cで校正することにする. 実際に係数を計算してみると, この補間式と実測値の差は図9となる. なお, この図では温度計1045940の方は最小二乗法での残差を示してある.

補間式が3次式で, 二本の温度計の特性が似ているので, 勾配 (1次の係数) のみ調整しただけで, 残差は表1の不確かさ程度となっている. -40 °Cから250 °Cという比較的広い温度領域で, 低温側は何ら校正点が無いにも拘わらず, 非常によい結果が得られた.

図9の基準関数は3次式, 一方, 図7, 図8で使ったJISの規準関数は変形した4次式で, 次数としてはJISの規準関数の方が高いにも拘わらず, フィッティングの結果はよくない. 図7, 図8と図9の差は, 基準関数と偏差関数を使う補間式について一つの重要な点を示唆している. つ

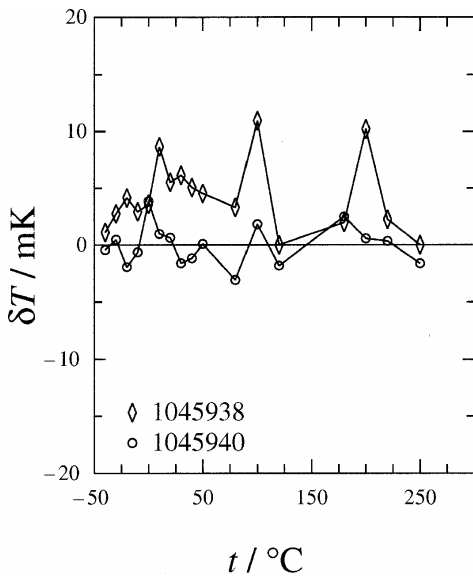


図9 最小二乗法で求めた補間式(温度計1045940)を基準関数として、1次の偏差関数で、250℃のみで校正したときの温度計1045938の残差。なお、温度計1045940は最小二乗法での残差。

まり、

温度計の特性をよく表す基準関数を使えば偏差関数という手法が使えるが、特性の似ていない関数では、偏差関数という手法が使えない。

ということが言える。「温度計の校正」という作業が「温度測定の正確さを向上させる」という意味なら、JISの規準関数と偏差関数の組み合わせは補間法には適していない。

なお、ここでの結果は、JISの規準関数を否定するものではない。特定の目的で製作された抵抗体を、勝手に、他の目的(ここでは高精度の温度計)として使っているので、すべての責任は使用者側にある。

5. 不確かさの伝搬

JISに従って製作されているPt100という抵抗体を、別の目的の温度計として利用するときの補間法の一例を示した。この補間法を使って温度測定する際には、JISの許容差を不確かさの要因として扱うことができない。利用者の責任で校正と不確かさの評価が必要となる。

温度計を校正する際の不確かさは校正温度以外にも伝搬する。校正済みの温度計を使って温度測定するとき、この伝搬による不確かさも考慮する必要がある。最小二乗法で得られた補間式でも同じである。

正規分布しているデータに最小二乗法を適用するときには、不確かさは残差(の分散)として処理できる。し

かし、GUMに従って評価した校正の際の不確かさには、一般に、正規分布以外の不確かさの要因が含まれている。特に、温度計の校正の際の不確かさには、最小二乗法で処理したときに補間式の残差に反映されない要因が含まれている可能性がある。このとき、最小二乗法で得られた残差とは別の方法で、校正点の不確かさの伝搬を処理する必要がある。

最小二乗法の残差として処理できない不確かさの要因についての厳密な処理法や解析的な考察は専門書に譲るとして、ここでは、温度計の校正に限定して、校正点の不確かさの伝搬を見積る例を示す。

なお、表1の2本の温度計はほとんど同じ結果となるため、以下、1本の温度計(1045940)の結果についてのみ示す。また、補間式は3次式とする。

5.1 3次式の係数を4校正点で決める場合

最初に最小二乗法ではなく、校正点の数と式の係数の数が一致する場合を検討する。この場合、その係数を通して校正点の不確かさが伝搬する。図5で計算した4点を用い、それらの校正点の不確かさが伝搬する様子を合成したものを図10に示す。

この図では校正点以外の温度では校正点よりも不確かさが増加する領域と減少する領域とが見られ、不確かさが、多少、誇張されて伝搬している。この図でも分かる

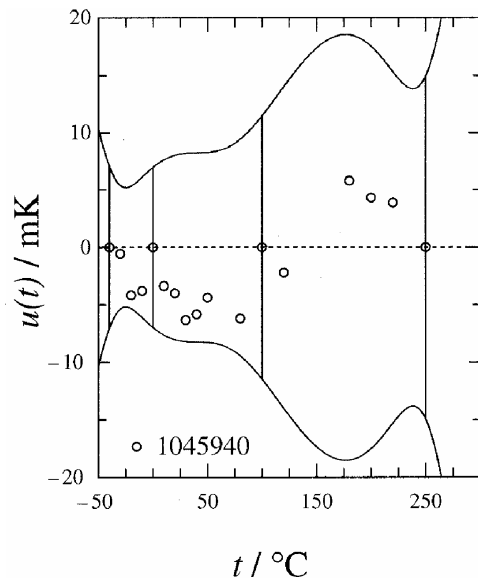


図10 3次式の係数を4点で校正して決めたときの各校正点の不確かさの伝搬を合成した不確かさ。4点として、-40℃、0℃、100℃、250℃としてある。見やすくするために伝搬する不確かさは負側も描いてある。図の○は表1の測定点で、縦線は係数の決定に使った校正点の不確かさの2倍である。

ように, 校正点の数と係数の数が一致する場合には, 不確かさの曲線は, 校正点では校正点の不確かさと一致するのが特徴である.

5.2 最小二乗法での補間式の不確かさ

次に, 最小二乗法で得られた式で検討する.

温度計の校正データである表1の不確かさと最小二乗法で得られた式からの残差の図3 (標準偏差は約1.7 mK) を比べると, 表1の不確かさには, 最小二乗法で得られた式の残差に反映されない不確かさが大部分を占めていることが分かる. ここでは, 校正点の不確かさが, 最小二乗法で求めた係数を通して伝搬する様子を示す.

式(5)を使って最小二乗法で求めた係数, $a_k(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, は, 一般に, 互いに独立ではない. 係数 a_k の間に相関があると不確かさの伝搬の計算が複雑になる. 係数 a_k 間に相関がなく, 独立に決まるように $P_k(t)$ を変形する. このためには, k 次の多項式 $P_k(t)$ が直交化条件,

$$\sum_{i=1}^m w_i P_k(t_i) P_l(t_i) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \sum_{i=1}^m w_i P_k(t_i)^2 & k = l \end{cases} \quad (14)$$

を満足するようにする. なお, この直交関数 $P_k(t)$ を使えば, 一般の多項式は, $P_k(t)$ の線形結合で記述することができる.

式(1)の $P_k(t)$ として, この条件式(14)を満たすようにして, 最小二乗法で係数 $a_k(k = 0, 1, \dots, n)$ を求めると, $a_k(k = 0, 1, \dots, n)$ は互いに独立に決めることができる. また, a_k は R_j の線形関数となっている.

温度 t での $R(t)$ の不確かさ $u(R(t))$ は, a_k が互いに独立で, R_j の関数となっているので, $R(t)$ の不確かさ $u(R(t))$ は,

$$u(R(t))^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^n \frac{\partial a_k}{\partial R_i} P_k(t) \right)^2 \left(u_i \frac{dR(t_i)}{dt} \right)^2 \quad (15)$$

から求めることができる. なお, 係数 a_k の微分 $\partial a_k / \partial R_j$ は, 式(4)の両辺を R_j で微分することにより求めることができる.

また, 上記の式は, 抵抗での不確かさを計算しているが, 温度の不確かさ $u(t)$ に変換した方が直感的に分かりやすい. このためには,

$$u(t) = u(R(t)) \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^{-1} \quad (16)$$

と変換する.

$u(t)$ は単純な式ではないので, 以下, 具体的なデータを使って計算した結果を述べる.

・5点校正のとき

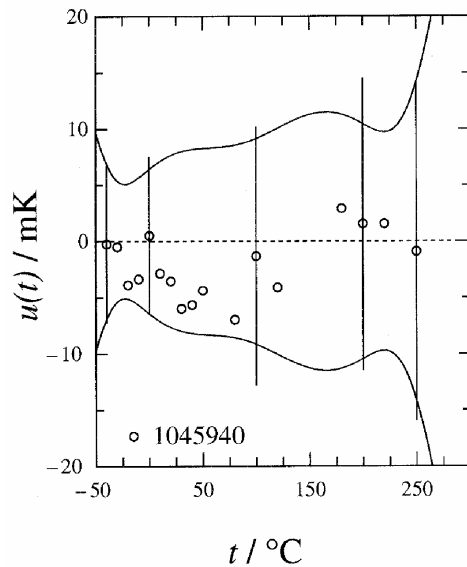


図11 3次式の係数を5点で校正して決めたときの各校正点の不確かさの伝搬を合成した不確かさ. 5点として, -40°C , 0°C , 100°C , 200°C , 250°C としてある. 縦線は各校正点の不確かさの2倍である. 見やすくするために伝搬する不確かさは負側も描いてある.

最小二乗法を使って3次式の係数を5点で校正したときの結果を図11に示す. この図の曲線は, 校正点での不確かさを合成したときの様子である. 図10とは校正点が1点増えているのみであるが, 全体の不確かさは小さくなる. 最小二乗法で係数を最適に調整したため, 各校正点の不確かさからの影響が小さくなっている.

最小二乗法で得られた式では, 各校正点の計算値が実測値とはずれている. このずれは最小二乗法で補間式が最適化されたために生じている. 最小二乗法で得られた式を使えば, 最もよい推定値になっている. このため最適な推定値が使える分だけ不確かさが小さくなっている.

・全データを使ったとき

つぎに, 多数点を使った時に, 各データの不確かさの伝搬を合成したときの様子を示す. 図12の曲線は, 表1の全てのデータを使ったときの合成した不確かさである. データの増加に伴い, 不確かさの曲線は図11により小さくなっている. 校正点の増加が不確かさを小さくしており, 最小二乗法という手法が有効に働いていることを示している.

なお, ここでは直交多項式を使っての処理法を説明したが, 式(5)の形で係数 a_k を求め, 相関を無視して上記の方法で処理すると, 相関部分が重複して加算されるため, 不確かさは, 多少, 大きくなる. 不確かさの伝搬曲線は, 例えば, 図12の曲線より, 多少大きな値となる. 不確かさの程度によっては, 相関を無視して処理することもできる.

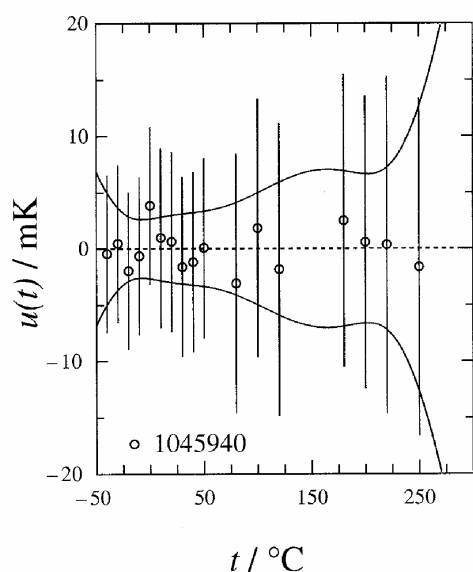


図12 3次式の係数を全校正点を使って決めるとき、各校正点の不確かさからの伝搬を合成した不確かさ。縦線は各校正点の不確かさの2倍である。見やすくするために伝搬する不確かさは負側も描いてある。

6. まとめ

JISの抵抗体Pt100は、規格を満足するように製作され、規格の範囲で使用されることを前提としている。このPt100をその製作目的とは異なる精密な温度測定に使うことが多くなりつつある。また、計測器の高精度化にともない、簡単に1 mKを表示することが可能になった。しかし、これらの計器での測定では、補間式の問題やその不確かさが全く考慮されていない。ここでは、補間式とその不確かさについて考察例を示した。

1. Pt100など、この種の温度計を精密測定に使うときには最初に補間式の作成が不可欠であることを示した。ここでは常識的な手法である最小二乗法を使った補間式を推奨し、その計算例と展開次数の決め方の一例を示した。
2. JISの規準関数を使って、ITS-90のような基準関数と偏差関数を使う補間方法は、精密測定には適さないことを示した。同様に、JISの規準関数の係数を調整した式、つまり、JISの関数を利用して温度計を校正することは規格外の使用法であり、この校正結果に対して、例えば、許容差などは使うことができない。
3. 温度計の管理などの点から、校正点の数をできる限り少なくする方がよい。今回の温度計に関しては、3次式を5点校正することで十分である例を示した。但し、校正点の数と不確かさとの関係は、温度計および校正精度で異なるため、どの程度簡略できる

かは、校正データを使って検討する必要がある。

4. 校正点での不確かさは最小二乗法で得られた関数でも、その係数を通して校正点以外にも伝搬する。その処理法の一例を示した。

本報告書ではPt100のデータを基に、補間法と校正点の不確かさの伝搬の様子を示した。ここで示した手法はPt100に限らず、その他の抵抗温度計に適用できる。典型的な例としてはJISの古い規格品で、JPt100と呼ばれている温度計である。また、低温で使われているゲルマニウム抵抗温度計やロジウム鉄抵抗温度計などはほとんど同じ方法で扱うことができる。ここでは、これらを代表してPt100を使って示した。

なお、ここで注意すべきことは、本稿では最小二乗法の展開次数が適切であるとの仮定で議論を進めた。しかし、実際の温度計の校正では必ずしも展開次数が適切に決まるとは限らない。このとき補間式からの残差の影響、つまり、回帰式の選択に基づく不確かさも考慮しなければならないことを指摘しておく。

謝辞

ここでの解析に使用したデータは山里産業株式会社で測定して頂いた。この種の解析には非常に貴重なデータです。データの提供に協力して頂いた山里産業株式会社および測定に関係した方々に深く感謝いたします。

また、本稿作成にあたり、計測標準研究部門、応用統計研究室の榎原研正室長および田中秀幸研究員に統計処理法についての貴重なご意見を頂いた。多くの時間を割いてのご指導に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) Crovini, L., Jung, H., Kemp, R., Ling, S., Mangum, B. and Sakurai, H.: The platinum resistance thermometer range of the International Temperature Scale for 1990, *metrologia*, Vol. 28, pp. 317-325 (1991).
- 2) Preston-Thomas, H.: The International Temperature Scale of 1990, *metrologia*, Vol. 27, pp. 3-10, 107 (1990).
- 3) 計量研究所: 1990年国際温度目盛 (ITS-90), 計量研究所報告, Vol. 40, pp. 308-317 (1991).
- 4) 計量研究所 (編): 1968年国際実用温度目盛, コロナ社 (1968).
- 5) 櫻井弘久, 田村收, 新井優: 1990年国際温度目盛に関する補足情報, 計量研究所報告, Vol. 41, pp. 307-358 (1992).

- 6) JIS C 1604:測温抵抗体 (1997).
- 7) ISO, ed.: *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (1993).
- 8) Tamura, O., Sakurai, H. and Nakajima, T.: Low Temperature Characteristics of Some Industrial-Grade Platinum Resistance Thermometers, in Schooley, J. ed., *Temperature, Its Measurement and Control in Science and Industry*, Vol. 6, pp. 443-448, New York (1992), American Institute of Physics.
- 9) Marcarino, P., Merlone, A., Steur, P., Actis, A. and Antinori, M.: Proposal: new reference functions for industrial platinum resistance thermometers, in Zvizdic, D. ed., *Proceedings, 9th International Symposium on Temperature and Thermal Measurement in Industry and Science*, Vol. 2, pp. 807-812, Zagreb, Croatia (2004), IMEKO Technical Committee 12, Laboratory for Process Measurement.
- 10) Weckström, T.: Pt-100 thermometers and the ITS-90, in Zvizdic, D. ed., *Proceedings, 9th International Symposium on Temperature and Thermal Measurement in Industry and Science*, Vol. 2, pp. 813-816, Zagreb, Croatia (2004), IMEKO Technical Committee 12, Laboratory for Process Measurement.