研 究 報 告

# 相関がある不確かさの一取り扱い法

坂 本 泰 彦*

# A method to evaluate uncertainty with correlation

SAKAMOTO Yasuhiko

## 1. はじめに

測定結果の不確かさを評価したり表現するときに，万人に共通のガイドとして参照されているのが

- GUM（International Organization for Standardization (ISO) Guide to Expression of Uncertainty in Measurement (1995)）

であり，それを適用した事例集としてはシンガポールで発行された

- "SAC-SINGLAS Technical Guide 1 : Guidelines on the Evaluation and Expression of Measurement Uncertainty", 2nd Edition, March 2001

などがある．

いずれにも共通していることとして，不確かさを集計していく場合に，入力変数 $x_i$ ごとにまとめて集計していくように定式化していることがある．このことを，入力変数の間に相関がある場合の式を例にとって見てみると，

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)u(x_i,x_j)$$

(GUM (13)式)

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j)$$

(GUM (16)式)

となっていて，項を区別するための指標は $x$ の下付の $i$, $j$ を用いている．

本報告は，$u$ に下付の指標を添えることで項を区別する方法を提案するものである．すなわち，

$$\begin{aligned}u_c^2(y)&=\sum_{g=1}^{G}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{h(g)}}\right)^2u_g^2(x_{h(g)})\\&=\sum_{g=1}^{G}c_{h(g)}^2u_g^2(x_{h(g)})\end{aligned}\tag{1}$$

という式を提案する．

*計測標準研究部門 電磁気計測科

この式をもとにすると，相関がある入力変数の不確かさについて，実験的に評価できる量と数式で計算する変数との対応がよいため有効な場合がある．本報告ではこの定式法の基本的な考え方を説明する．

## 2. 数式の補足説明

式(1)の $u_g(x_{h(g)})$ は，互いに独立な不確かさの要因のうちの $g$ 番目のものである．引数 $x_{h(g)}$ は，$g$ 番目の不確かさの要因に寄与する単独の入力変数(input estimate)，あるいは複数の入力変数(input estimates)の関数として定義される変数である．注意点は，

- 異なる $g$ に対して同一の変数を引数 $x_{h(g)}$ として割り当てることがある(例えば，ある変数 $x_i$ について相互に無相関な type A の不確かさ $u_{\mathrm{typeA}}(x_i)$ と type B の不確かさ $u_{\mathrm{typeB}}(x_i)$ がそれぞれ別に定量化できるというように，ひとつの変数 $x_i$ についていくつかの項に分解したほうが扱いやすい場合.)．
- 1つの $g$ に対応して，複数の入力変数をある関数でまとめたものを引数 $x_{h(g)}$ として割り当てることがある(例えば，現実の実験的評価において，GUM (13) 式の各項を個別に評価するのが困難であるわりに，いくつかの変数(input estimates) に関する項が合成された要因の大きさが容易に正確に評価できる場合.)．

全引数は必ずしも互いに無相関とは限らない．ただし，式(1)の各項の $u_g(x_{h(g)})$ は互いに無相関である．

## 3. 簡略化した測定モデルを使った適用例

例として，抵抗分圧比を校正する場合を取り上げ，簡略化したモデルを用いて，説明を補う．図1のように，公称1 kΩの抵抗器を2個直列接続し，電源から公称値1 mAの電流を流して，2つの電圧を $K$ 組くりかえし測定して抵抗分圧比を求めるモデルを考える．各組の測定電圧は，$V_{1,k}$, $V_{2,k}$ と標記する．($k=1,\ldots,K$)

ここで，電圧測定結果がばらつく要因として次の2つを考察の対象とする．

1） 2つの抵抗の温度係数 $\alpha_1$, $\alpha_2$ の値が非ゼロの値であって，電圧測定の組ごとに温度が変化するために，測定

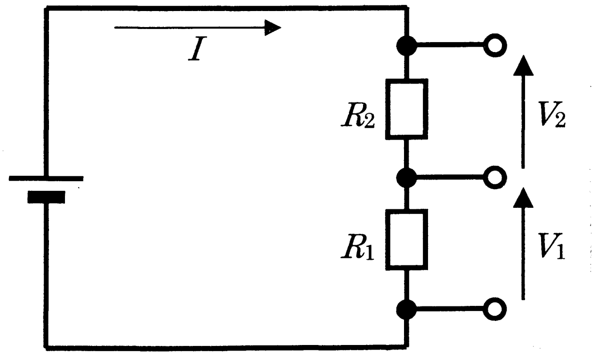


図1　抵抗分圧比を，電圧降下を測定して校正するモデル

電圧値が平衡点まわりでばらつく．

2）電圧を測る電圧計のノイズのためにばらつく．

これら2つの要因のために，電圧を繰り返して測定すると，値が平衡点周りにばらつく．これに起因する不確かさは type A として評価する方針で臨む．これとは別に，電圧計の分解能が有限であって，それに起因する不確かさを type B として評価する．

ここで，1)の要因による電圧変動は $V_{1,k}$，$V_{2,k}$の間に相関があるが，2)の要因による電圧変動は $V_{1,k}$，$V_{2,k}$の間に相関がないことに注意しておく．

本方法では，次のように処理する．

測定方程式：
$$\frac{R_1+R_2}{R_1} \triangleq y = 1+\frac{V_2}{V_1} = f(V_1, V_2) = f(x_1, x_2) = 1+\frac{x_2}{x_1} = x_3. \qquad (2)$$

不確かさの各要素：

$u_1(x_3)$：$K$ 組の$\left(1+\frac{V_{2,k}}{V_{1,k}}\right)$のデータを統計処理して見積もられる，抵抗分圧比$1+\frac{V_2}{V_1}=x_3$の type A 不確かさ．

$u_2(x_1)$：電圧計の分解能が有限であることに起因する，電圧$V_1$の type B 不確かさ．

$u_3(x_2)$：電圧計の分解能が有限であることに起因する，電圧$V_2$の type B 不確かさ．

それぞれに大きさが見積もられた $u_1(x_3), u_2(x_1), u_3(x_2)$を，

$$u_c^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 u_1^2(x_3) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_2^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u_3^2(x_2) \qquad (3)$$

に代入して，$u_c^2\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)$が求まる．

表1　不確かさの要因の項の対応 一般的な雑音測定系の等価回路

| $x_i \diagdown x_j$ | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $u_2(x_1)$ | $u_1(x_3)$ | $u_1(x_3)$ | |
| $x_2$ | | | $u_3(x_2)$ | $u_1(x_3)$ |

## 4. GUM との対応

式(3)が，GUM など多くの文献で一般的に使われている GUM (13) 式と対応が取れていることを説明する．式(2)の独立変数 $x_1, x_2$を表1の行，列にとった．表1の行列の対角要素が，GUM (13) 式の$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$項に対応し，右上の非対角要素が GUM (13) 式の $2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)u(x_i, x_j)$項に対応する．表1の行列要素に書き込んである $u_g(x_{h(g)})$が，式(3)の$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{h(g)}}\right)^2 u_g^2(x_{h(g)})$項に対応する．表1から，相関項も含めて対応を尽くしていることがわかる．したがって，GUM (13) 式の代わりに式(3)を用いて合成不確かさを求めてよい．

なお，表1で表現されている対応を，式を使って表すと以下のとおりである．等式の左辺は GUM (13) 式の項，右辺は式(3)の項である．

まず，GUM (13) 式で1つの項としているがここでは分離したほうが扱いやすいものは

$$u^2(x_1) = u^2_{\mathrm{typeB}}(x_1) + u^2_{\mathrm{typeA}}(x_1) = u_2^2(x_1) + u^2_{\mathrm{typeA}}(x_1),$$
$$u^2(x_2) = u^2_{\mathrm{typeB}}(x_2) + u^2_{\mathrm{typeA}}(x_2) = u_3^2(x_2) + u^2_{\mathrm{typeA}}(x_2). \qquad (4)$$

表1の対角要素のうち，変数 $x_i$間で互いに相関がないものについては

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2_{\mathrm{typeB}}(x_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_2^2(x_1),$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2_{\mathrm{typeB}}(x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u_3^2(x_2). \qquad (5)$$

表1のその他の要素については，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2_{\mathrm{typeA}}(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2_{\mathrm{typeA}}(x_2)$$

$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)u^2(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2u_1^2(x_3). \qquad (6)$$

## 5. この方法の特長

ここで示した例は簡略化したモデルで変数も少ないが，実際の測定では一般に変数が多く，相関がある項が一般には変数の組み合わせの数だけ増える可能性がある．GUM (13) 式をもとにするとそれらの各項について不確かさを見積もることになるので労力が増える可能性がある．それに対して，実際の測定では，相関のある項の不確かさはまとめて type A として見積もれることが多く，そのような場合は GUM (13) 式をもとにすると (6) 式の左辺のように多数の項になるものが，本方法では (6) 式の右辺のように少ない項で実験的見積もりも計算も扱える．

GUM (13) 式をもとにする方法だと，(4) 式左辺の項を算出するために $u^2_{\mathrm{typeA}}(x_1)$, $u^2_{\mathrm{typeA}}(x_2)$ を見積もる必要が生じるが，これは実験的には必ずしも容易でないことがある．本手法ではこれらの項を分離して求める必要はない．そのため，本手法のほうが，測定によっては不確かさを見積もる実験の計画が立てやすいことがある．あつかう対象によっては，本手法を用いると有効である．実際，「依頼試験校正 ZB.直流分圧比」の不確かさ評価においては，本手法が活用されている．