Cole-Hopf 変換を用いたバーガース流体統計量の量子計算

Based on [arXiv:2412.17206] in collaboration with

Koichi Miyamoto (QIQB, U-Osaka), **Soichiro Yamazaki** (U-Tokyo),
Kotaro Fujisawa (Tokyo U. of Tech.), and **Naoki Yoshida** (U-Tokyo and RIKEN AIP)

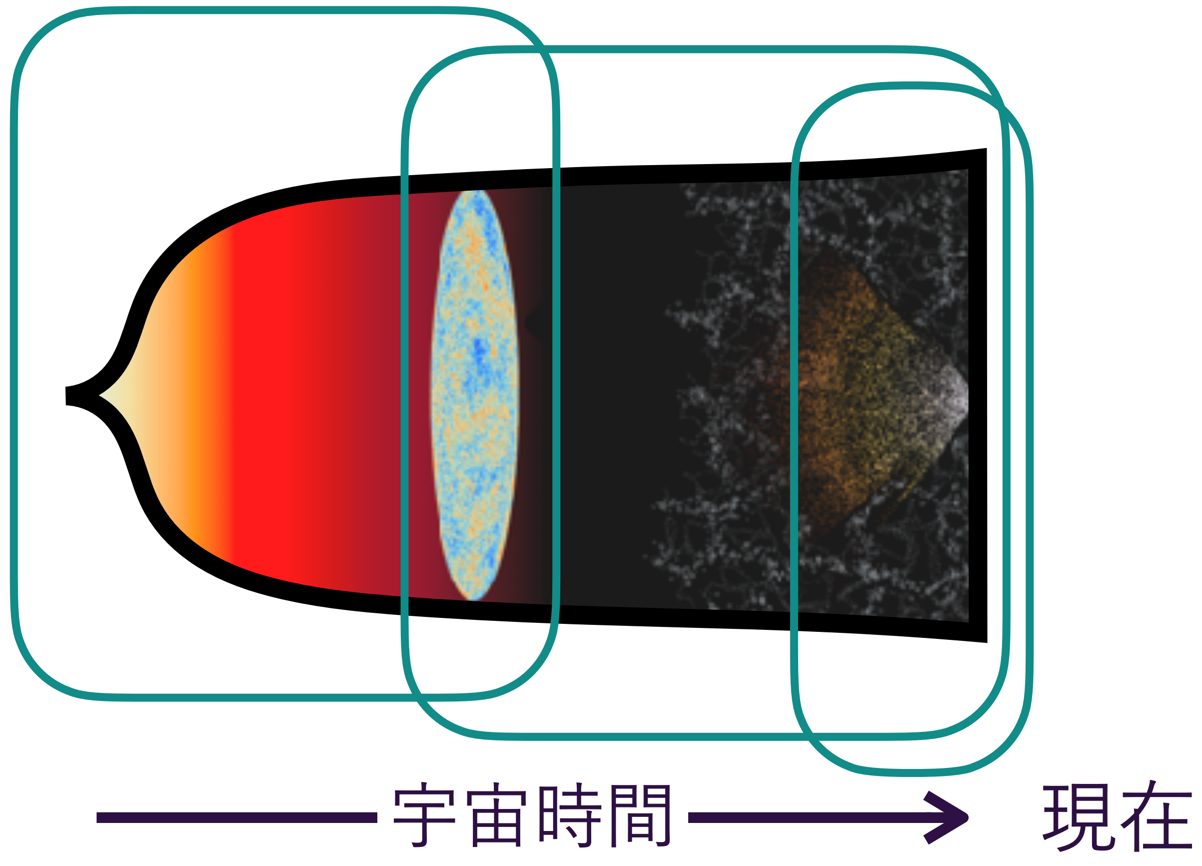
2026/5/8, 第3回 Quantum CAE 研究会

Fumio Uchida (CTPU-CGA, IBS)

Institute for Basic Science

量子計算を宇宙物理に応用したい

×



自己紹介

内田 経夫　韓国 基礎科学研究院 宇宙・重力・天体素粒子物理グループ (IBS CTPU-CGA)

共同研究者

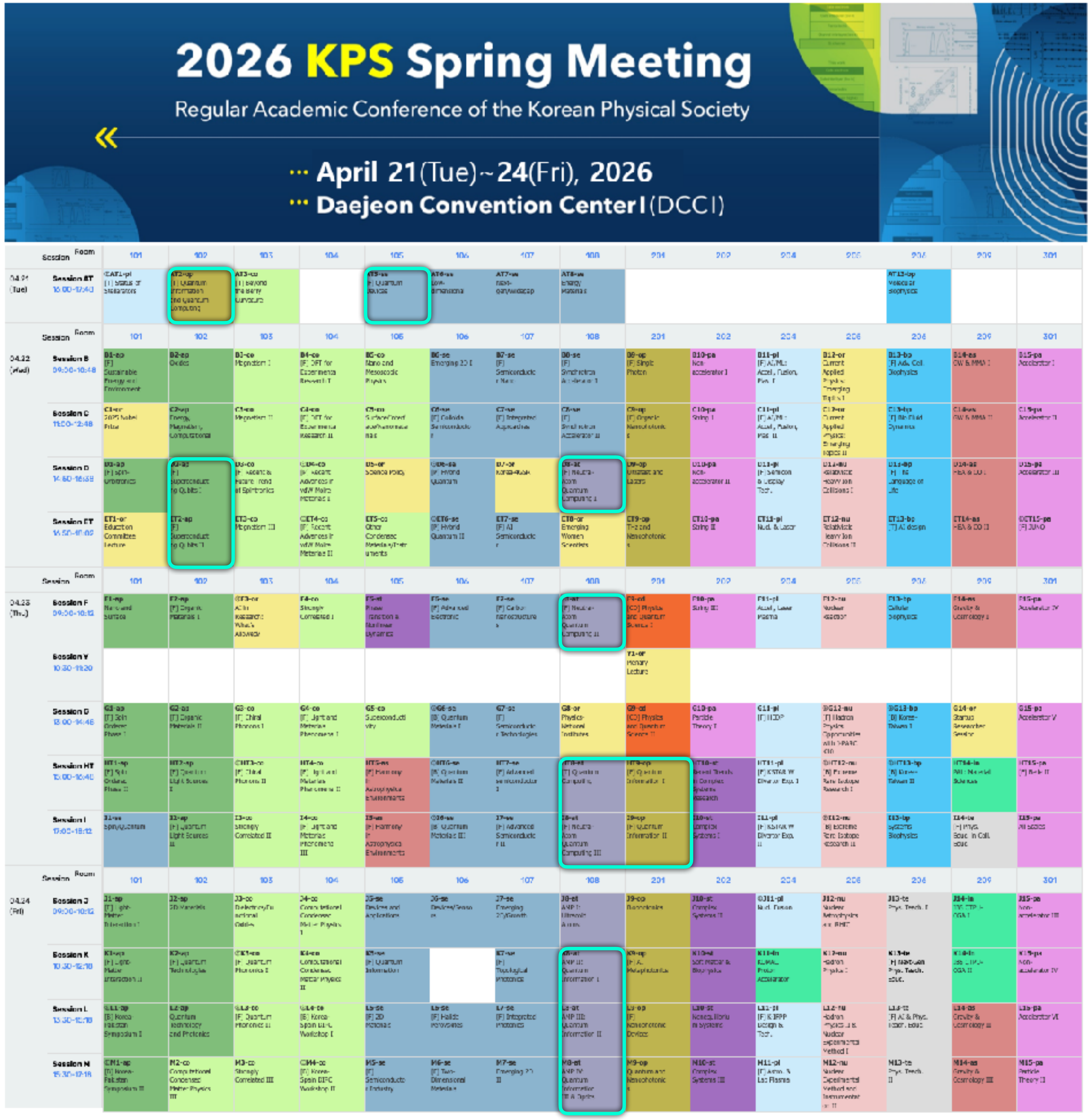
宮本 幸一　大阪大学 QIQB
山﨑 壮一郎　東京大学 宇宙理論研究室 (UTAP)
藤澤 幸太郎　工学院大学
吉田 直紀　東京大学 (UTAP, Kavli IPMU), 理研 AIP 統計宇宙科学チーム

韓国物理学会 (余談)

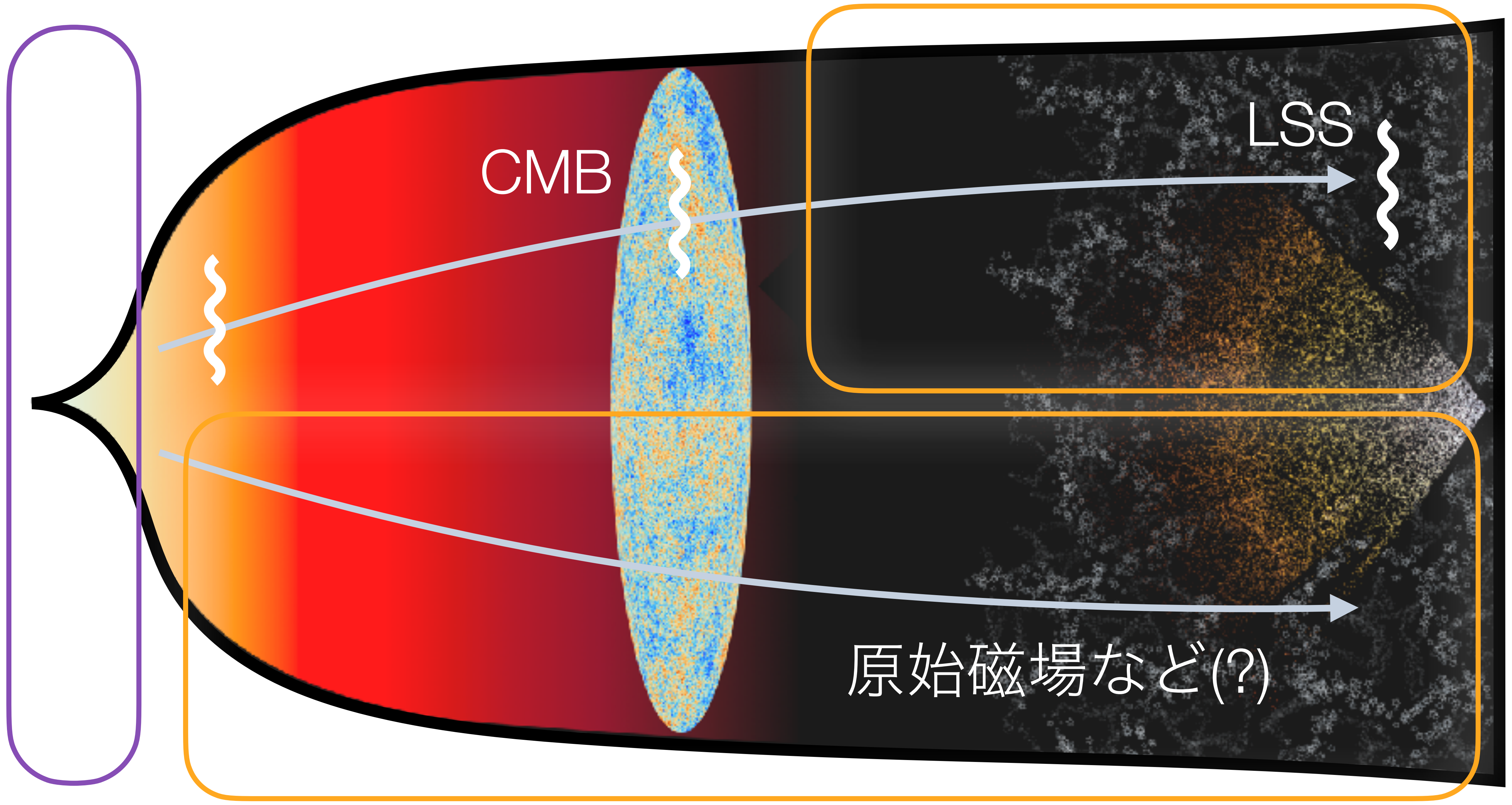
全日程に量子計算セッション

- 中性原子型 [Focus session]
- 超伝導型
- イオントラップ型
- フォトン型

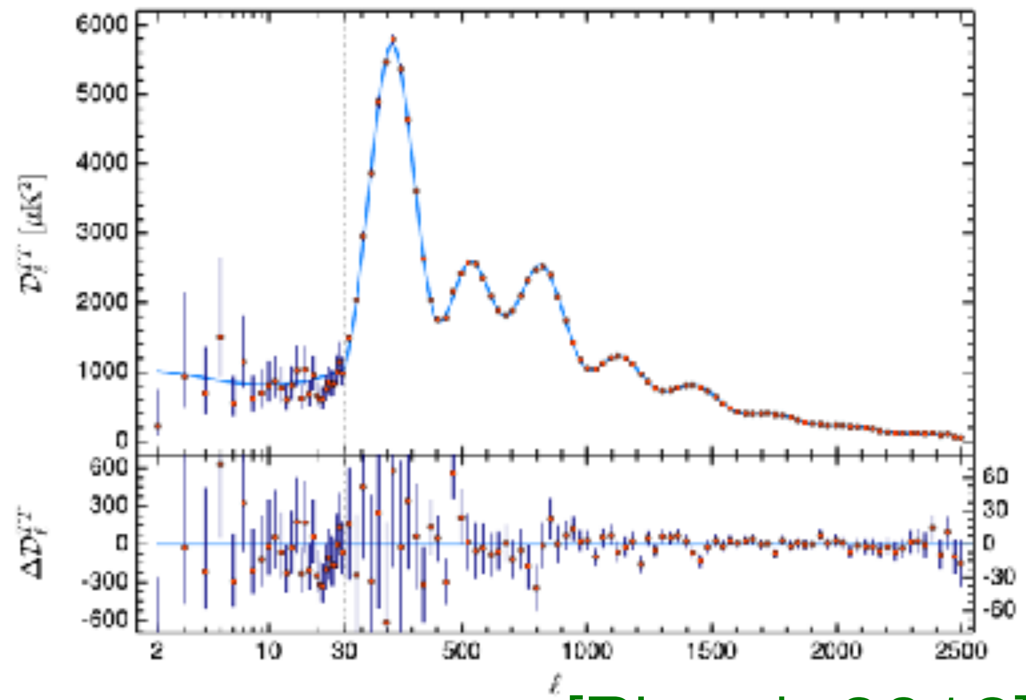
- 量子情報
- 量子アルゴリズム



宇宙論と統計量



CMB 温度ゆらぎのパワースペクトル



[Planck 2018]

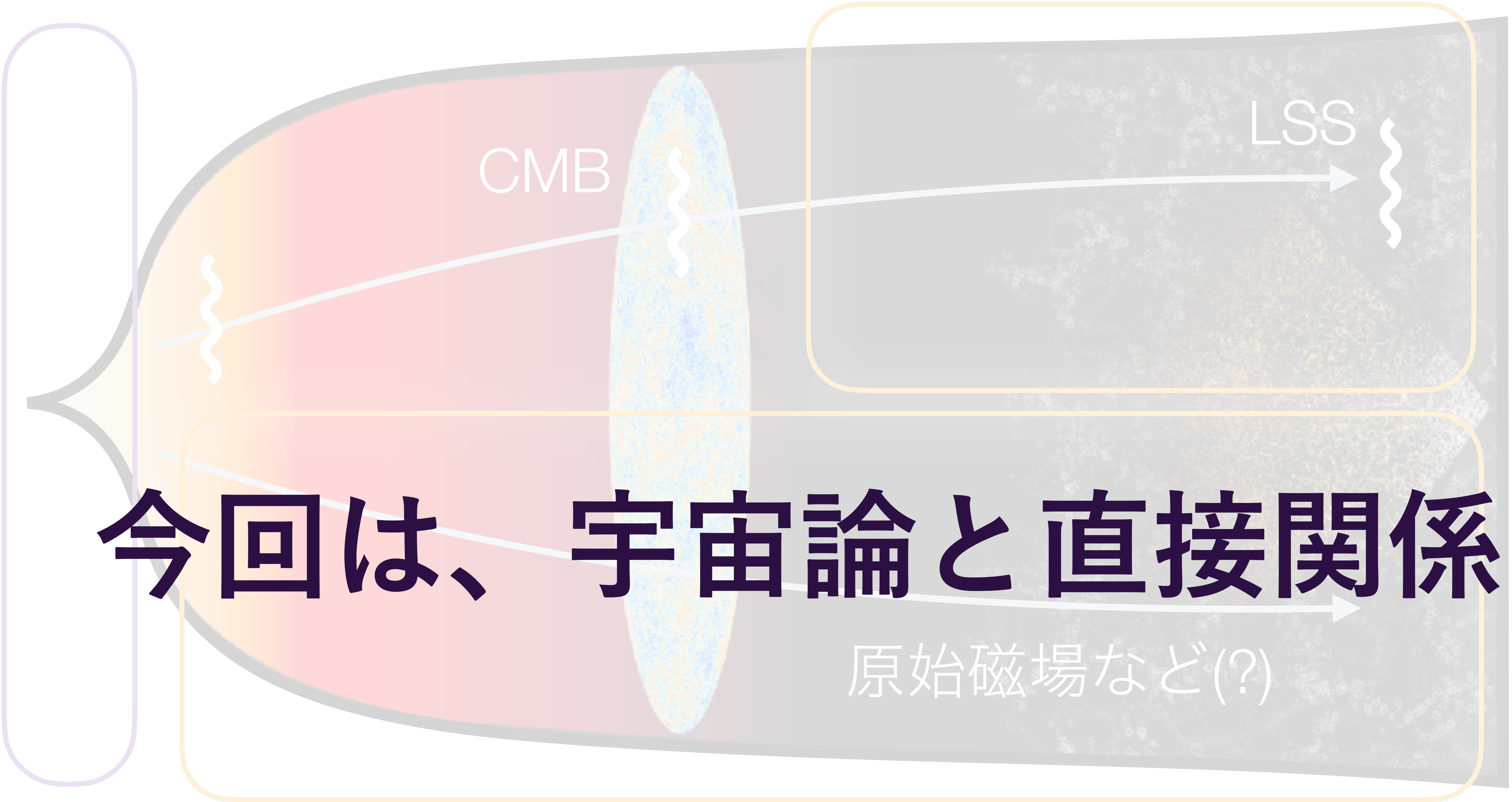
理論模型は古典ゆらぎの**統計的性質**を決定

非線形時間発展 (密度ゆらぎが重力でつぶれる など)

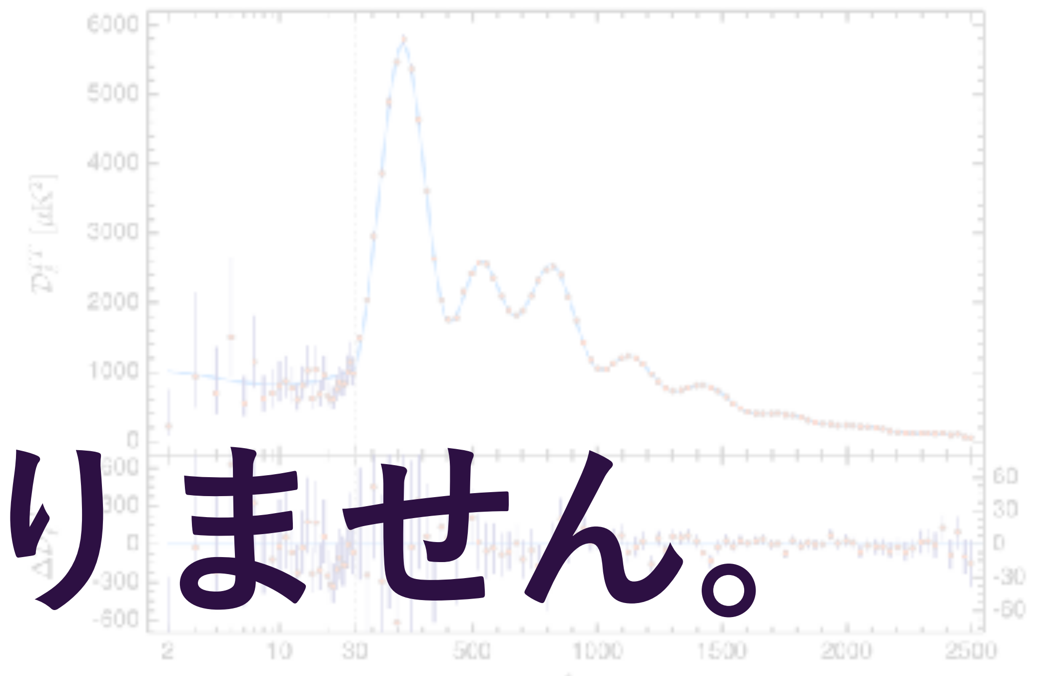
観測と理論の整合性を検討

Figs (modified) from [Planck, ESA], [D. Schlegel/Berkeley Lab using data from DESI, M. Zamani (NSF's NOIRLab)]

宇宙論と統計量



CMB 温度ゆらぎのパワースペクトル



[Planck 2018]

今回は、宇宙論と直接関係ありません。

理論模型は古典ゆらぎの**統計的性質**を決定

非線形時間発展 (密度ゆらぎが重力でつぶれる など)

観測と理論の整合性を検討

Figs (modified) from [Planck, ESA], [D. Schlegel/Berkeley Lab using data from DESI, M. Zamani (NSF's NOIRLab)]

本研究の位置づけ

宇宙論でしばしば現れる問題

- **非線形偏微分方程式**を解き、
- 解の**統計的性質**を調べたい。

今回は、1次元 Burgers 方程式

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu \partial_x^2 u$$

移流　拡散

のもとで、速度場の n 次モーメント

$$\langle u^n \rangle$$

を**量子計算**できることを示す。

流体の toy model としての Burgers 方程式

Burgers equation $\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{u}$ [Bateman 1915] [Burgers 1948]

移流　　拡散

+ pressure gradient

Navier–Stokes equation $\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{u}$

+ electromagnetic field

magneto-hydrodynamics (MHD) $\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \frac{(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{\rho} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{u}$

1 次元 Burgers 方程式は拡散方程式に帰着する

1次元 Burgers 方程式

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu \partial_x^2 u$$

1次元拡散方程式

$$\partial_t \psi = \nu \partial_x^2 \psi$$

Cole–Hopf 変換 [Hopf 1950] [Cole 1951]

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int^x dy\, u(y)\right), \qquad u = -2\nu \frac{\partial_x \psi}{\psi}$$

非線形変数変換 × 量子計算

1次元Burgers方程式：**非線形偏微分方程式**

↓

Cole–Hopf 変換：**非線形変数変換**

↓

1次元拡散方程式：　**線形偏微分方程式**

↓

空間離散化のち量子計算で時間積分

↓

量子状態から、**解の統計量を読出し**

↓

😀

- 提案アルゴリズムの概要
- 2点関数の効率的な読出し
- 一般化（多点関数・近似の改良）

時間積分

Burgers 方程式のかわりに拡散方程式を積分する

情報読出し時の都合のために、$\psi' := \partial_x \psi$ について解くことにする

1次元拡散方程式 ($\nu = 1$)

$$\partial_t \psi'(t,x) = \partial_x^2 \psi'(t,x)$$

初期条件

$$\psi'(t=0,x) = \psi'_0(x)$$

→

$$\psi'_i(t) = \psi'(t, x = i\Delta x)$$

空間離散化

$$\frac{d}{dt}\psi'_i = A_{ij}\psi'_j$$

$$\psi'_i(t=0) = \psi'_{0,i}$$

→

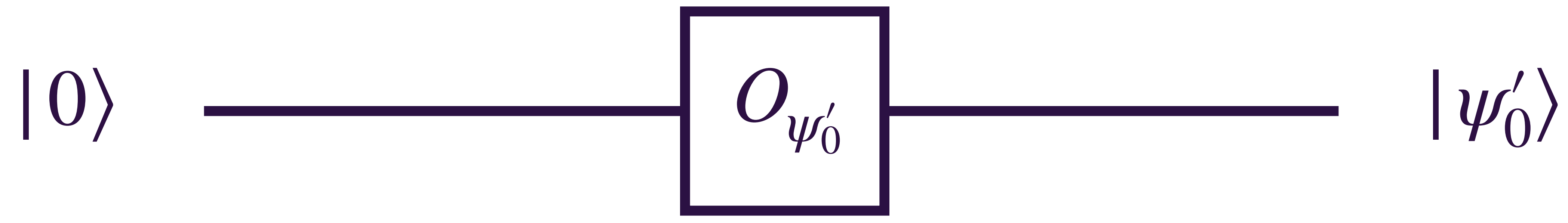
$$|\psi'(t)\rangle = \mathcal{N}^{-1}_{\psi'(t)} \sum_i \psi'_i(t)\,|i\rangle$$

振幅埋込み

$$\frac{d}{dt}|\psi'\rangle = A\,|\psi'\rangle$$

$$|\psi'(t=0)\rangle = |\psi'_0\rangle$$

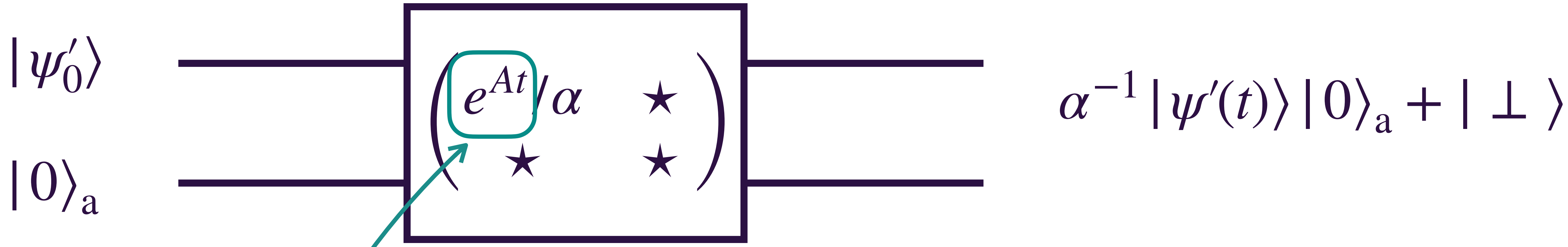
初期状態生成は、オラクルを仮定



初期条件 $|\psi'_0\rangle$ を効率的に生成する oracle $O_{\psi'_0}$ の存在を**仮定**する。

計算量評価では $O_{\psi'_0}$ の呼び出し回数を数える。

時間発展は、block encoding 中心差分スキーム × 周期境界条件



block encoding ※ とくに linear combination of Hamiltonian simulation [An, Childs, Lin 2026]

$$\psi'_i(t) = (e^{At})_{ij}\psi'_{0,j},$$

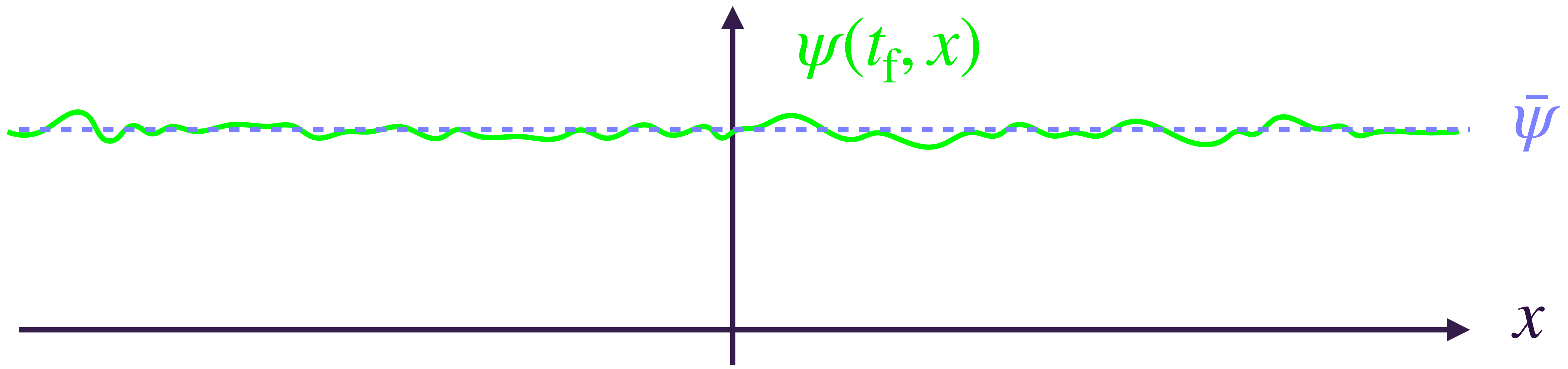
非ユニタリ

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}$$

統計量の読出し

逆 Cole–Hopf 変換を線形近似

最終時刻で $\psi(x)$ が摂動的であることを仮定すると



$$u(t_\mathrm{f}, x) = -2\frac{\partial_x \psi(t_\mathrm{f}, x)}{\psi(t_\mathrm{f}, x)} \simeq -2\frac{\partial_x \psi(t_\mathrm{f}, x)}{\bar{\psi}} \propto \partial_x \psi(t_\mathrm{f}, x)$$

この近似のもとで

$$|u(t_\mathrm{f}, x)\rangle = |\partial_x \psi(t_\mathrm{f}, x)\rangle$$

2点関数

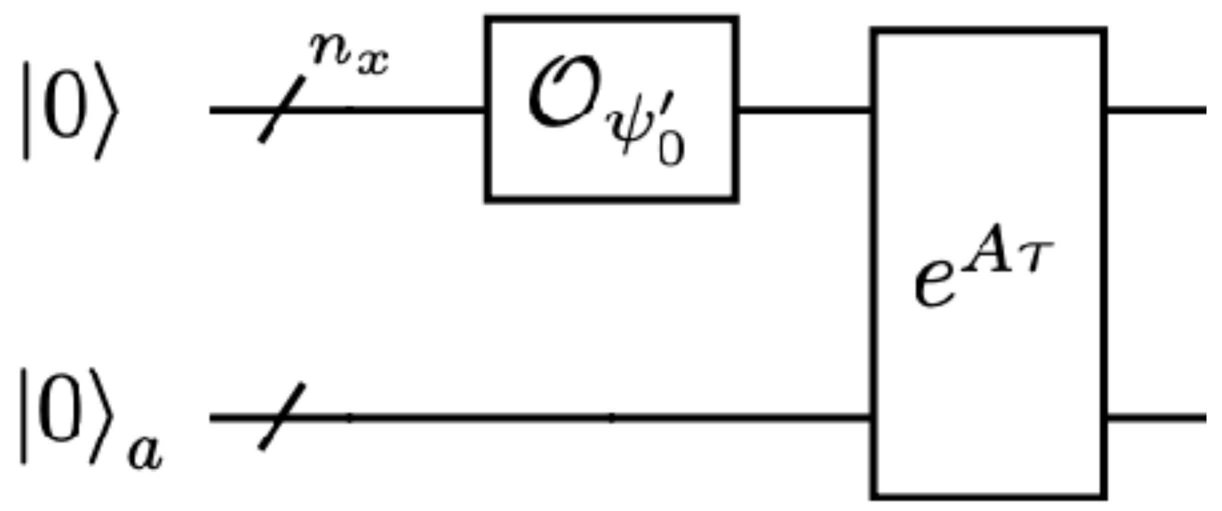
$$P^{(2)}(r) := \overline{u(x)\,u(x+r)} = N_x^{-1} \sum_i u_i u_{i+\rho}$$

$$= \underbrace{N_x^{-1} \| u \|^2}_{= \mathcal{O}(1)} \underline{\langle u \,|\, C^{(2)}(\rho) \,|\, u \rangle}$$

許容誤差 ε とすると

$$\frac{P^{(2)}(r)}{P^{(2)}(0)} = \frac{\langle u \,|\, C^{(2)}(\rho) \,|\, u \rangle}{\langle u \,|\, C^{(2)}(0) \,|\, u \rangle}$$

計算量 $\sim 1/\varepsilon$

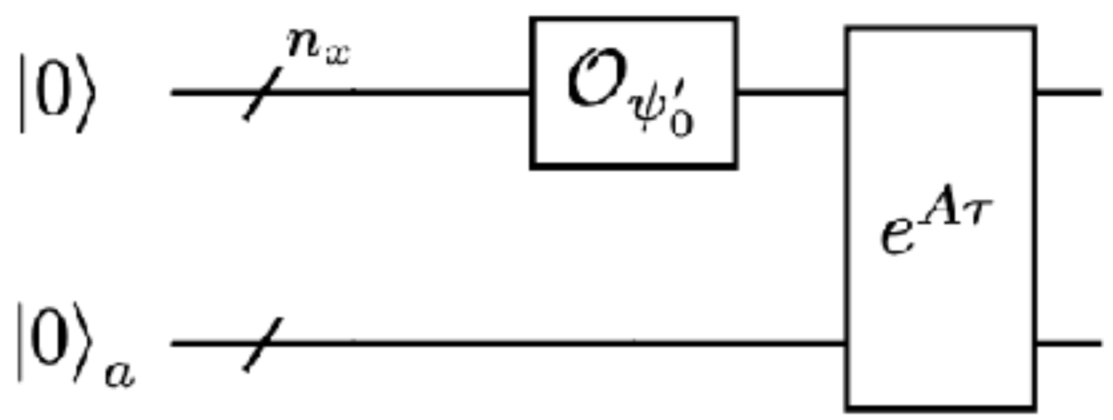


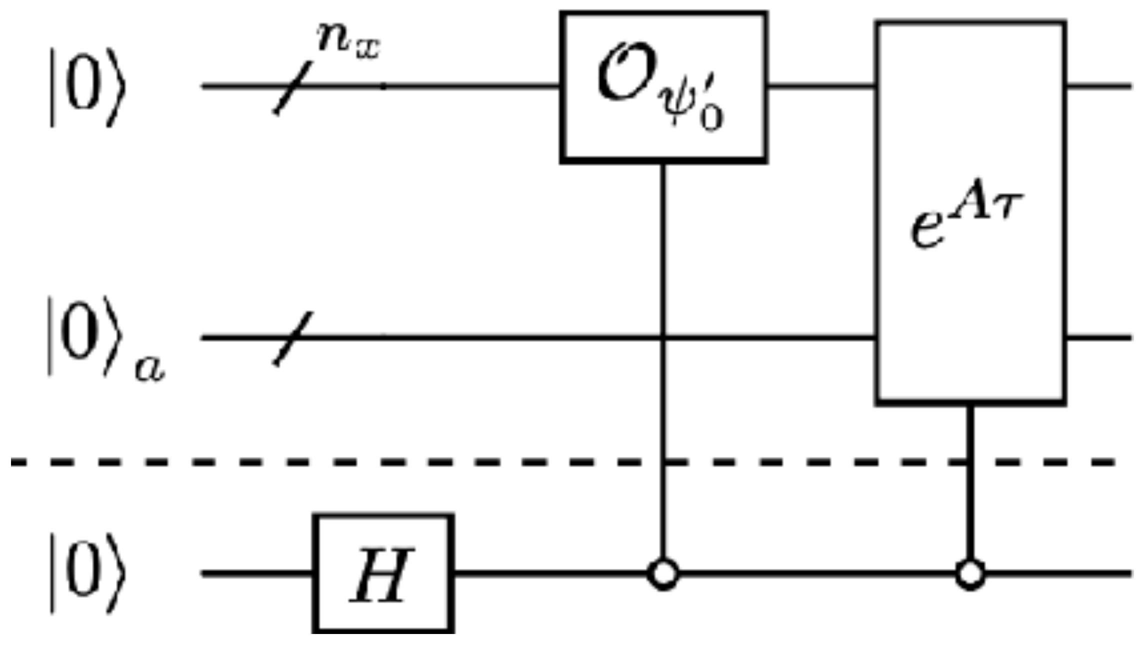
$$C^{(2)}(\rho) = \frac{1}{2}\left(P_{N_x}^{\rho} + P_{N_x}^{-\rho}\right),$$

$$P_{N_x} := \sum_{j=0}^{N_x-2} |j+1\rangle \langle j| + |0\rangle \langle N_x - 1|$$

overlap estimation algorithm で測定

多点関数へ　3点関数の場合





$$P^{(3)}(r_1, r_2) := \overline{u(x)\, u(x+r_1)\, u(x+r_2)} = N_x^{-1} \sum_i u_i\, u_{i+\rho_1}\, u_{i+\rho_2}$$

$$= \underline{N_x^{-1} \| u \|^3} \, \underline{\langle U^{(3)} | C^{(3)}(\rho_1, \rho_2) | U^{(3)} \rangle}$$

$$= \mathcal{O}(N_x^{1/2})$$

許容誤差 $N_x^{-1/2}\varepsilon$

$$|U^{(3)}\rangle := \frac{|\boldsymbol{u}\rangle^{\otimes 2} \otimes |0\rangle + |\boldsymbol{u}\rangle \otimes |\boldsymbol{0}\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

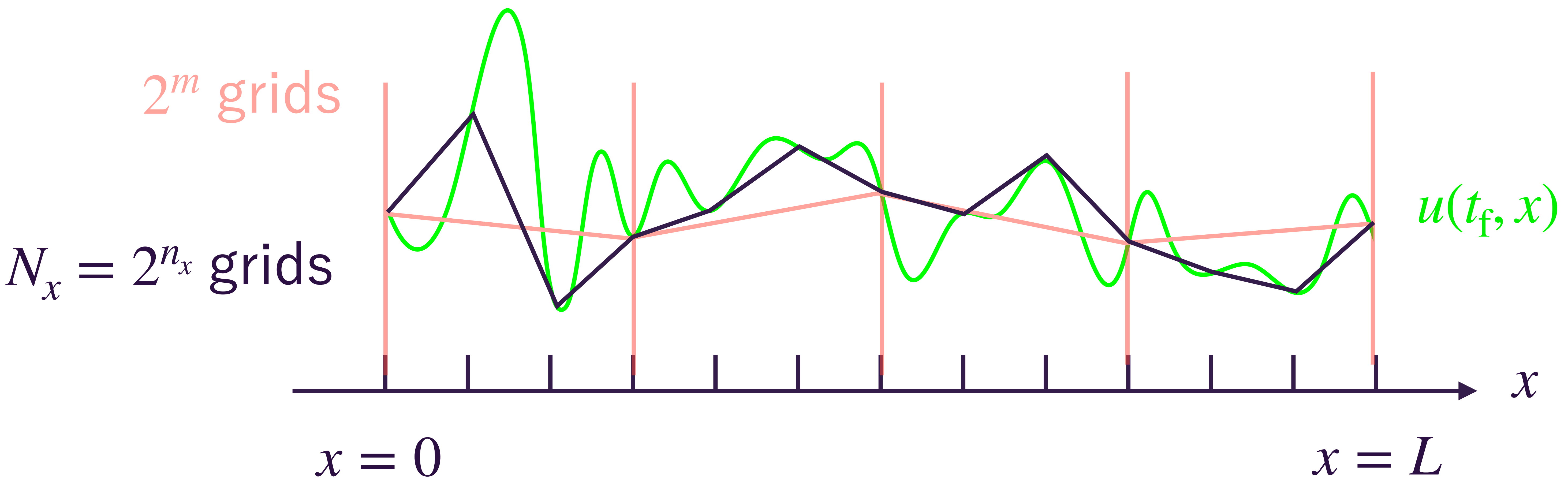
$$= \sum_{j,k} \frac{u_j u_k}{\sqrt{2}} |j, k, 0\rangle + \sum_l \frac{u_l}{\sqrt{2}} |l, 0, 1\rangle + |\perp\rangle$$

$$\frac{P^{(3)}(r_1, r_2)}{P^{(3)}(0, 0)} = \frac{\langle U^{(3)} | C^{(3)}(\rho_1, \rho_2) | U^{(3)} \rangle}{\langle U^{(3)} | C^{(3)}(0, 0) | U^{(3)} \rangle}$$

計算量 $\sim N_x^{1/2}/\varepsilon$

overlap estimation algorithm で測定

多点関数を調べる場合には適宜粗視化

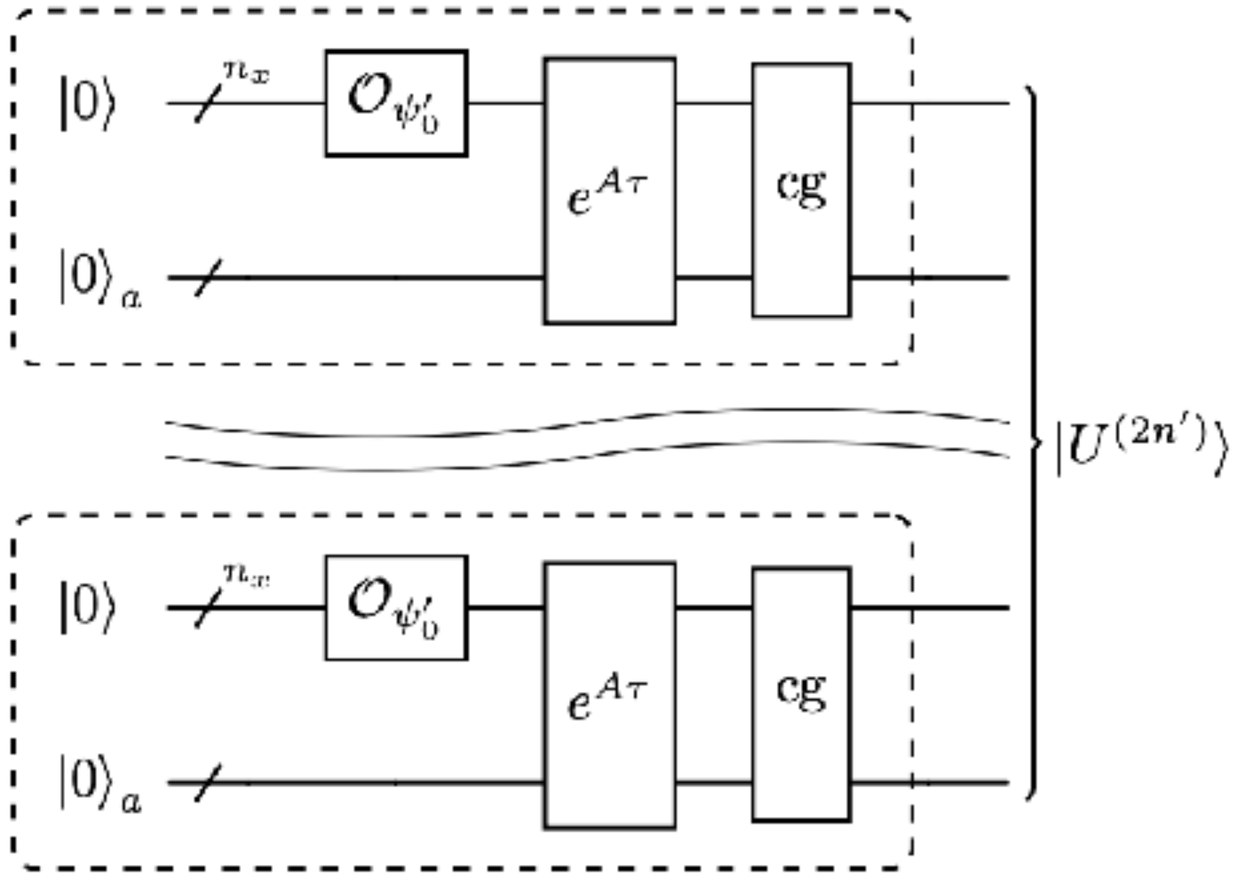


$$|\boldsymbol{u}\rangle_{\rm cg} := 1_{2^m} \otimes H^{\otimes n_x - m}|\boldsymbol{u}\rangle$$
$$= \sum_{k=0}^{2^m-1} u_{{\rm cg}\,k}|k\rangle|0\rangle_{\rm ss} + |\perp\rangle,$$

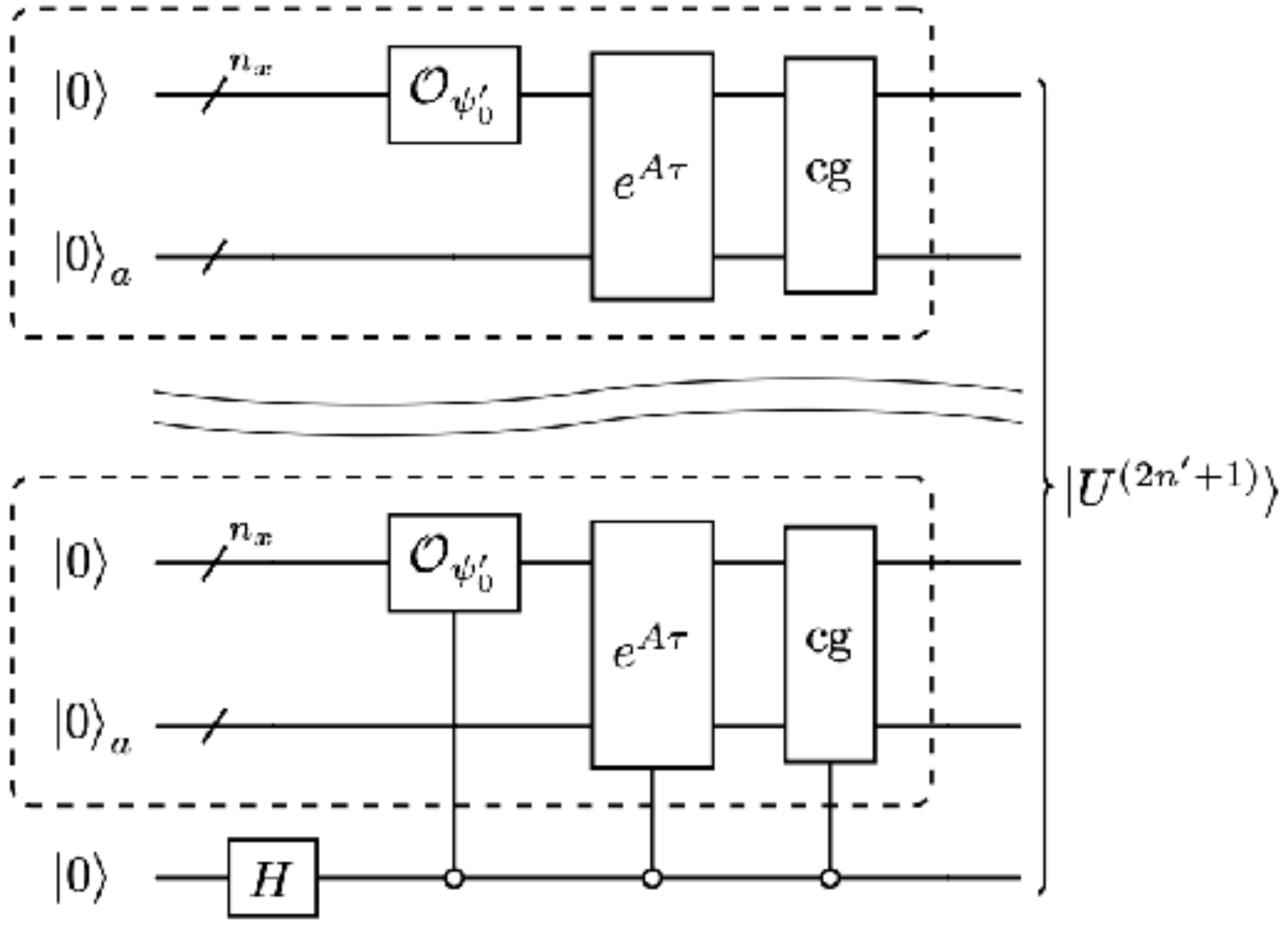
$$u_{{\rm cg}\,k} := 2^{-\frac{n_x-m}{2}} \sum_{j=2^{n_x-m}k}^{2^{n_x-m}(k+1)-1} \frac{u_j}{||\boldsymbol{u}||}$$

多点関数へ

$n = 2n'$: even



$n = 2n' + 1$: odd



$$P^{(n)}(r_1, \cdots, r_n) = 2^{-m} 2^{-n(n_x - m)/2} \| u \|^n \langle U^{(n)} | \tilde{C}^{(n)}(\rho_1, \cdots \rho_n) | U^{(n)} \rangle$$

$= \mathcal{O}\left(2^{(n-2)m/2}\right)$　　許容誤差 $2^{-(n-2)m/2}\varepsilon$ で測定

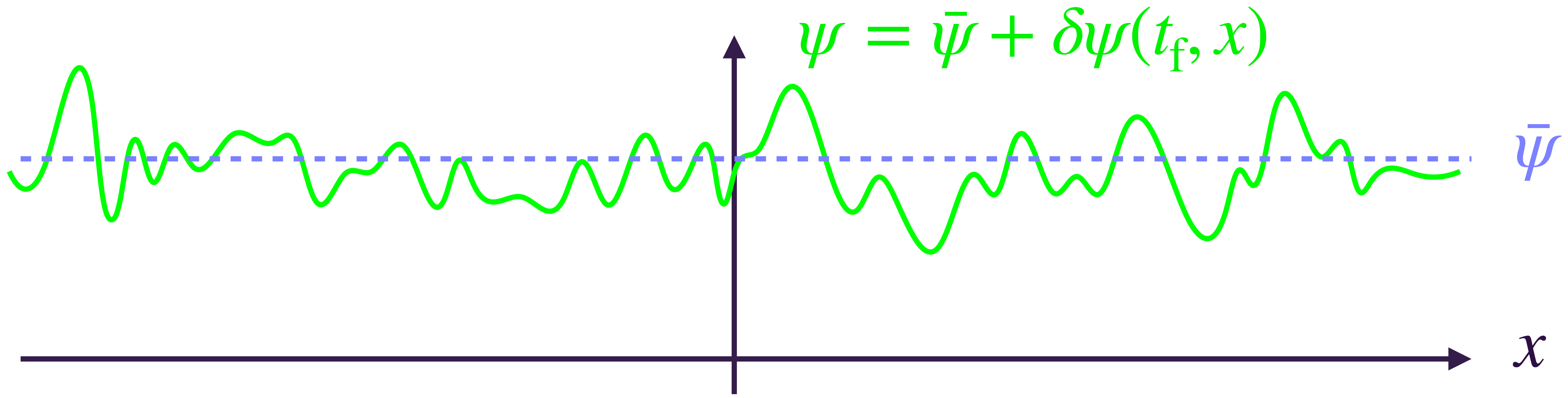
$$\frac{P^{(n)}(r_1, \cdots, r_2)}{P^{(n)}(0, \cdots, 0)} = \frac{\langle U^{(n)} | \tilde{C}^{(n)}(\rho_1, \cdots, \rho_n) | U^{(n)} \rangle}{\langle U^{(n)} | \tilde{C}^{(n)}(0, \cdots, 0) | U^{(n)} \rangle}$$

計算量 $\sim 2^{(n-2)m/2} / \varepsilon$

近似の改良

高次の近似

読み出し時に $\dfrac{\delta\psi}{\bar{\psi}} \sim \dfrac{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}}{\nu\,\nabla^2\boldsymbol{u}} = \mathrm{Re} \lesssim 1$ を仮定



0 次近似

$$u = -2\nu\frac{\partial_x\psi}{\psi} \simeq -2\nu\frac{\partial_x\psi}{\bar{\psi}}$$

$$|u(t_\mathrm{f}, x)\rangle = |\partial_x\psi(t_\mathrm{f}, x)\rangle$$

1 次近似

$$u = -2\nu\frac{\partial_x\psi}{\psi} \simeq -2\nu\frac{\partial_x\psi}{\bar{\psi}} + 2\nu\frac{\partial_x\psi\,\delta\psi}{\bar{\psi}^2}$$

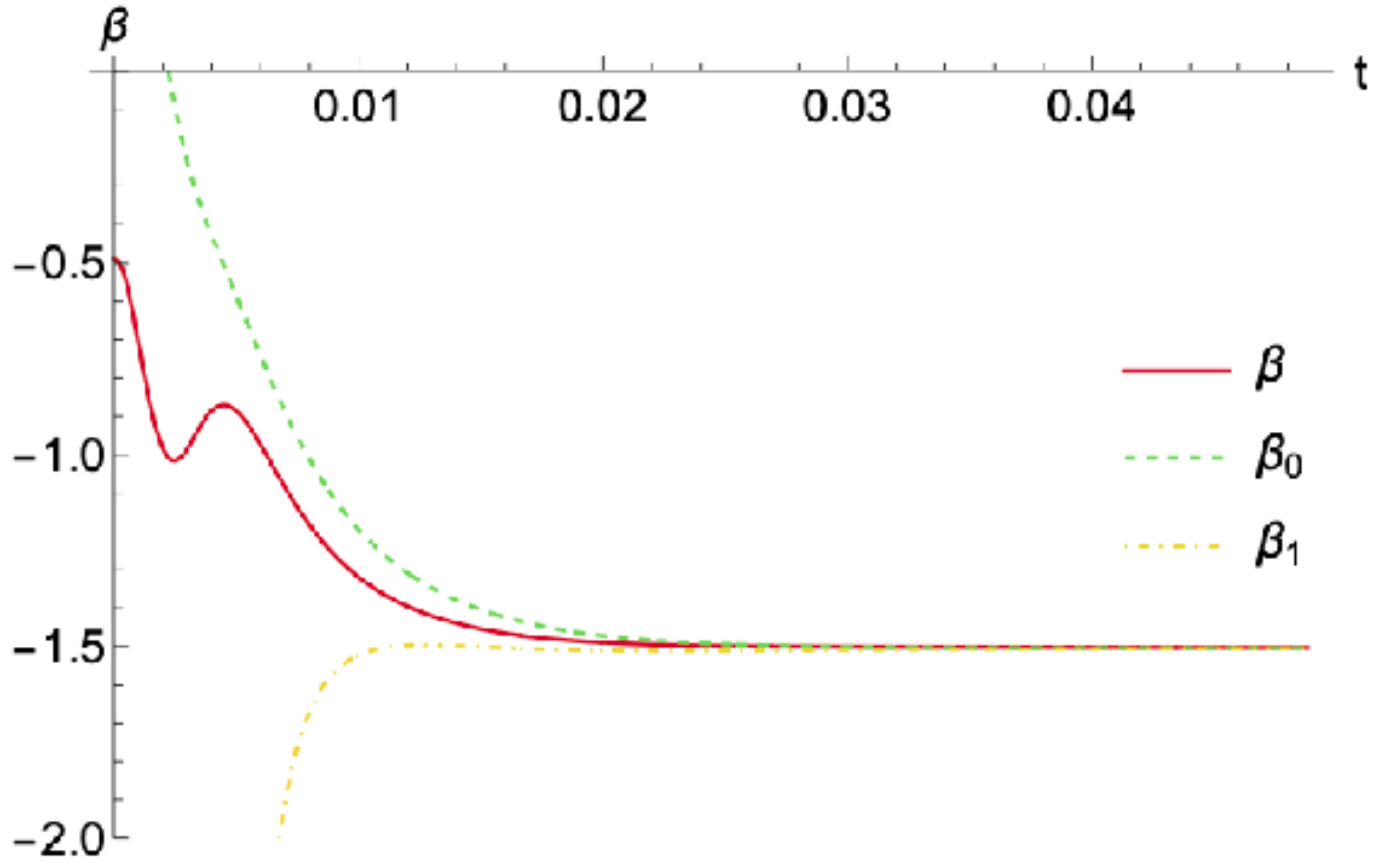
$$|u(t_\mathrm{f}, x)\rangle = |\phi(t_\mathrm{f}, x)\rangle\,|\partial_x\psi(t_\mathrm{f}, x)\rangle$$

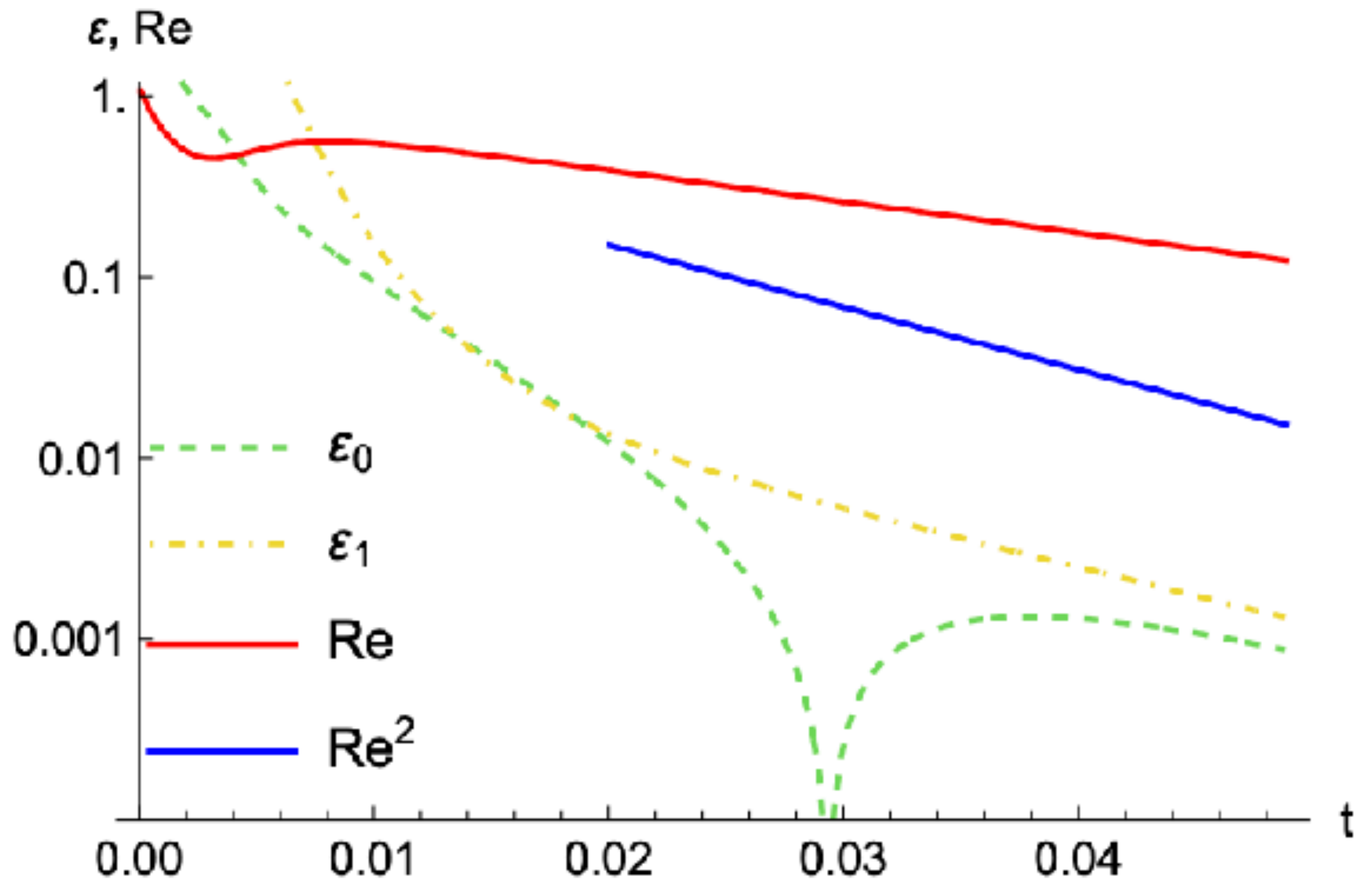
$$\phi := \bar{\psi} - \delta\psi$$

Flatness のエラー

$$\beta := \frac{P^{(4)}(0)}{P^{(2)}(0)^2} - 3$$ flatness

$$\varepsilon := \left|\beta_{\mathrm{approx}}/\beta - 1\right|$$ relative error





知りたい統計量によっては 0 次近似で十分

計算量評価

古典計算との比較　2点関数の評価は N_x について効率的!

$$u = -2\nu\frac{\partial_x\psi}{\psi}, \qquad \psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int dy\,\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)\psi_0(y)$$

古典的に評価するためには、ナイーブには $\mathcal{O}(N_x)$,

n 点関数 $P^{(n)} = L^{-1}\int dx\, u(x)u(x+r_1)\cdots u(x+r_{n-1})$ を評価するには $\mathcal{O}(N_x^2)$.

一方、今回の量子アルゴリズムでは、 $\sim t_\mathrm{f}\dfrac{\|\psi_0'\|}{\|\psi'(t_\mathrm{f})\|}\log N_x\cdot 2^{(n-2)m/2}/\varepsilon$

- t_f：積分時間
- $\log N_x$：空間体積
- n：n 点関数
- m：粗視化しない場合 $m = \log N_x$
- ε：許容誤差

まとめ

まとめ

- 宇宙論では、ゆらぎの統計量が意味を持つ
- 統計量 (多点関数) のみ読出せれば十分 → 量子計算の困難克服の可能性

- 今回は、1次元バーガース方程式に対する量子計算アルゴリズムを提案
  - 非線形変数変換により、拡散方程式に帰着 (厳密に線形化)

    1. 初期条件は、オラクルを仮定
    2. 時間発展は、linear combination of Hamiltonian simulation
    3. オペレータの期待値として統計量を読出し (overlap estimation)
       - 2 点関数の評価は N_x について指数加速

  - ただし重要な仮定：初期状態準備オラクルの存在，読出し時に $\mathrm{Re} \ll 1$ の近似