

第3回 Quantum CAE研究会 @産業技術総合研究所

実空間とフリー空間の読み出し手法

—— 比較およびCFDへの応用

黄欣馳^{1,2}, 西紘史^{1,2}, 川田佳史^{1,2}, 図師知文³, 松下雄一郎^{1,2,4}

1. Quemix 2. 東大 3. 住友ゴム/DUNLOP 4. 量研



- 問題背景

- 量子CAEの三つの課題: 量子状態用意(ベクトルエンコーディング)、量子計算(行列エンコーディング)、量子状態読み出し(ベクトルデコーディング)

- フーリエ空間読み出し手法(FSR)

- フーリエ空間読み出し手法の特徴

- 実空間とフーリエ空間の読み出し手法の比較

- 読み出し手法の概説および比較

- CFDへの応用


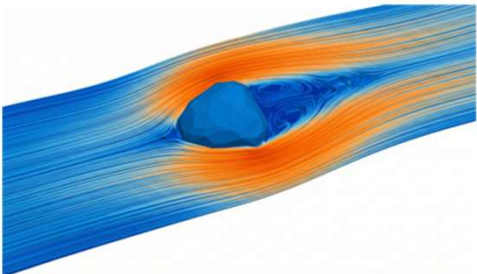
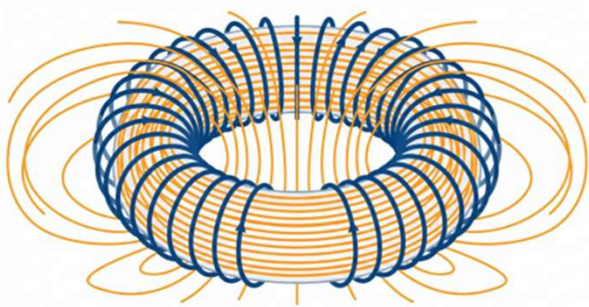
- 解の可視化

- End-to-End(E2E)シミュレーション



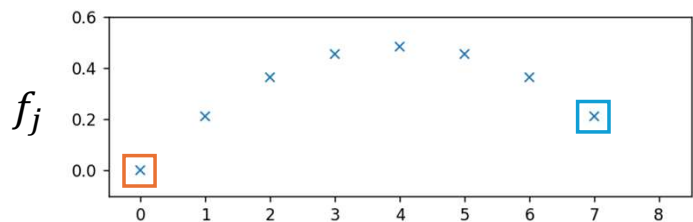
問題背景

コンピュータを利用した工学支援システムのこと

用途	<p>構造解析</p> 	<p>流体解析 (CFD)</p> 	<p>電磁界解析</p> 
解析対象	変形や応力	気体や液体の流れ・圧力	磁力や対象物との相互作用
支配式	Lamé 方程式等	Navier-Stokes 方程式等	Maxwell 方程式等

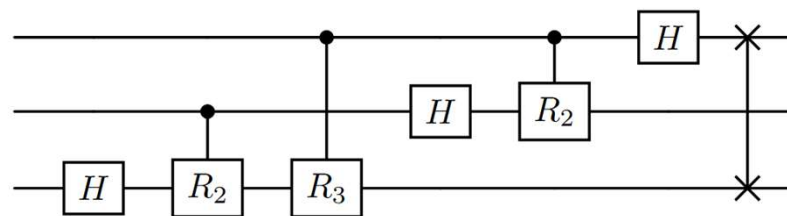
大規模な行列計算において量子計算機の適用が大いに期待されている

① n 個量子ビットは、 $N = 2^n$ の情報を含む
振幅エンコーディング



$$|\psi\rangle_3 = \boxed{f_0}|000\rangle + f_1|001\rangle + \dots + \boxed{f_7}|111\rangle$$

② 少数の量子ビットへのゲート操作 = 特定の大規模行列
e.g. 量子フーリエ変換 (QFT)

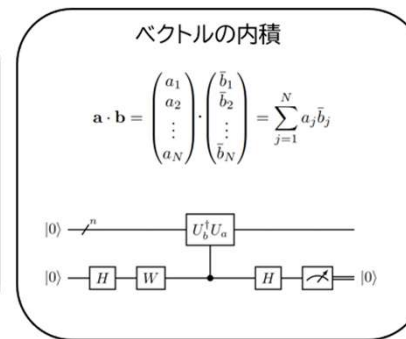
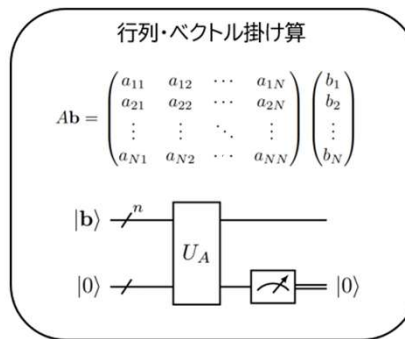
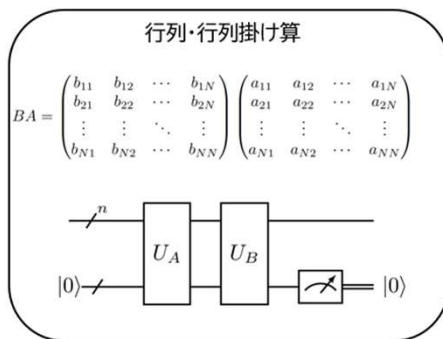


n^2 個の操作 $\rightarrow N \times N$ 密行列

$$R_j = Z_{2\pi/2^j}$$

③ CAE計算に用いる行列・ベクトル演算の量子回路化

n	N
10	$\approx 10^3$, 1千
20	$\approx 10^6$, 100万
30	$\approx 10^9$, 10億

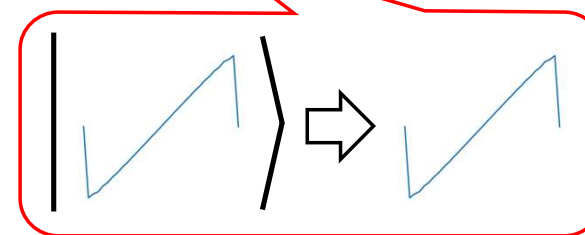
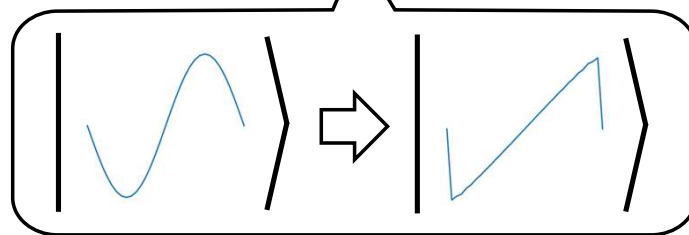
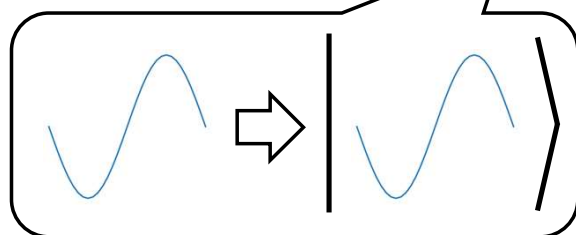
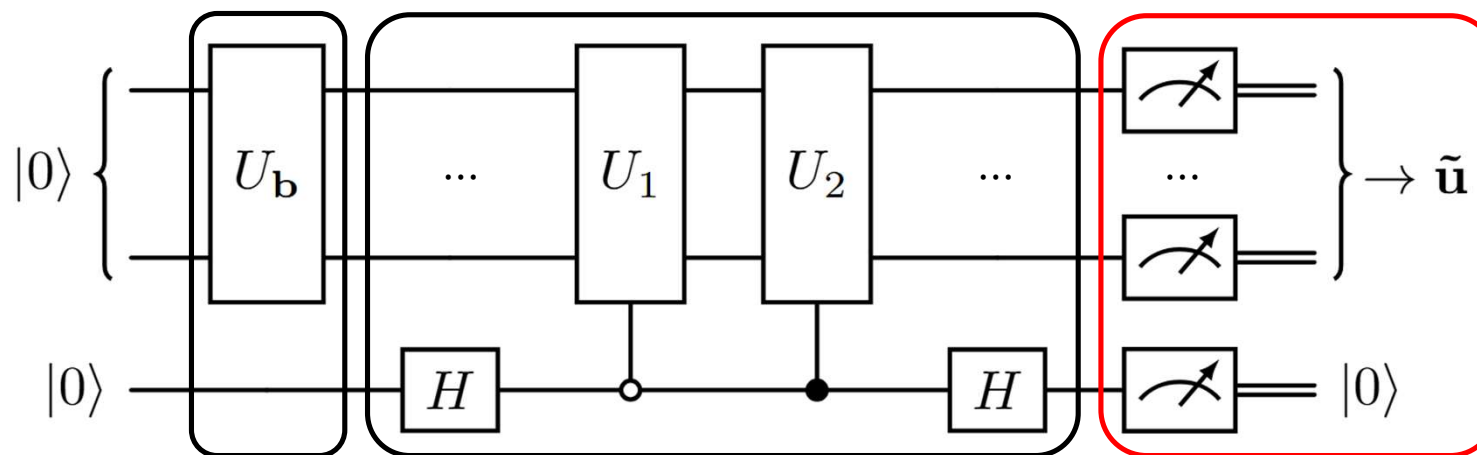


E2E 量子加速のため、効率良い読み出し手法は重要な課題

量子状態準備

量子計算

量子状態読み出し



回路深さ: $O(n)$ [arXiv:2603.03803 等]

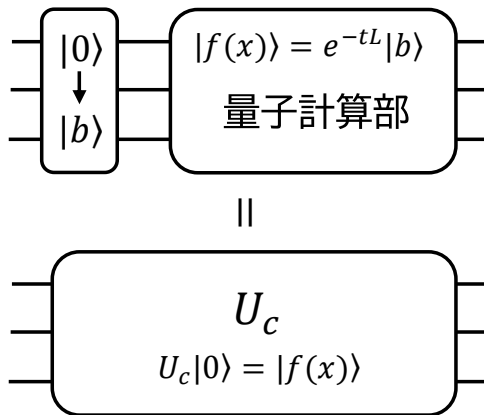
回路深さ: $O(n)$ [arXiv:2409.18559 等]

従来の読み出しコスト: $O(N)$

量子計算コストは、回路コストと読み出しコストに分ける

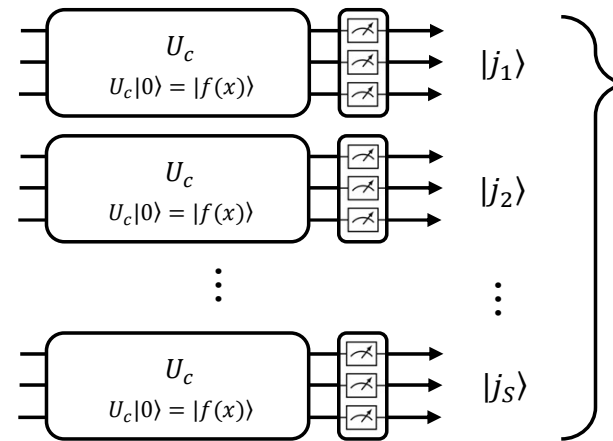
回路コスト \mathcal{D}

= (解の)量子状態を用意するための量子回路の深さ・ゲート操作数

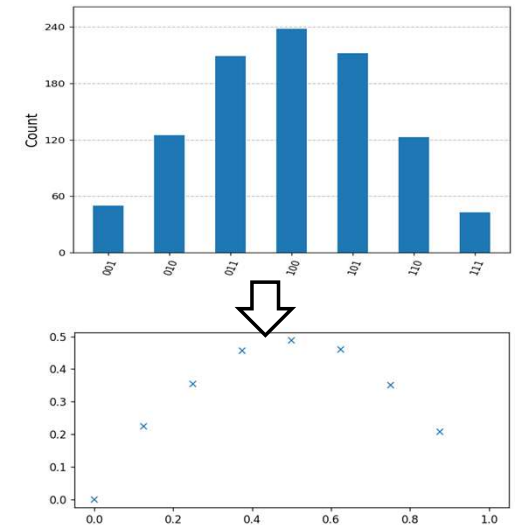


読み出しコスト S

= 量子回路の測定回数



$|j\rangle = |000\rangle, |001\rangle, \dots, |111\rangle$



- 量子計算コスト = $\mathcal{D} \times S$
- (理想)量子計算時間 = \mathcal{D}

① 非ユニタリ演算を実装するため、補助ビットを事後選択する → 読み出しコスト S が成功確率に反比例:

$$S = O(1/P_{\text{suc}})$$

② 関数を読み出しする際に、ビンごとに一回以上測定されないといけない

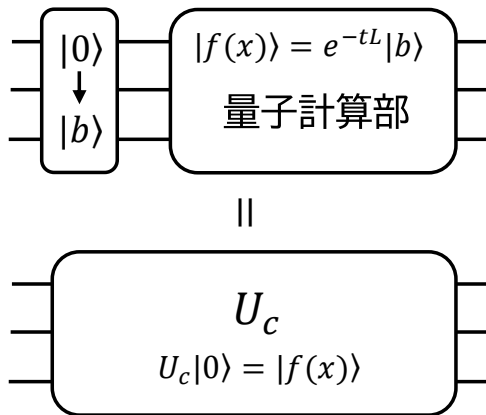


従来の読み出しコスト: $S = O(N)$

量子計算コストは、回路コストと読み出しコストに分ける

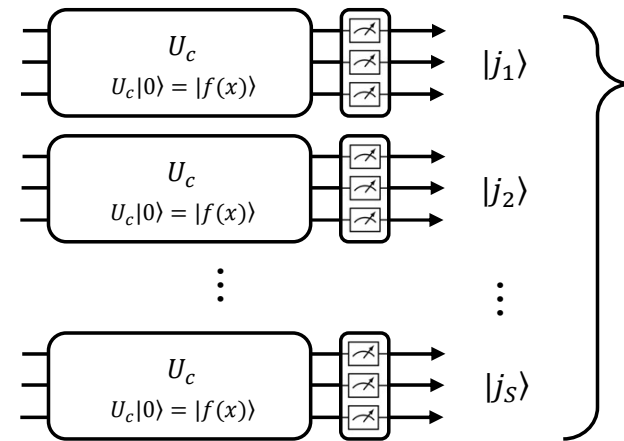
回路コスト \mathcal{D}

= (解の)量子状態を用意するための量子回路の深さ・ゲート操作数

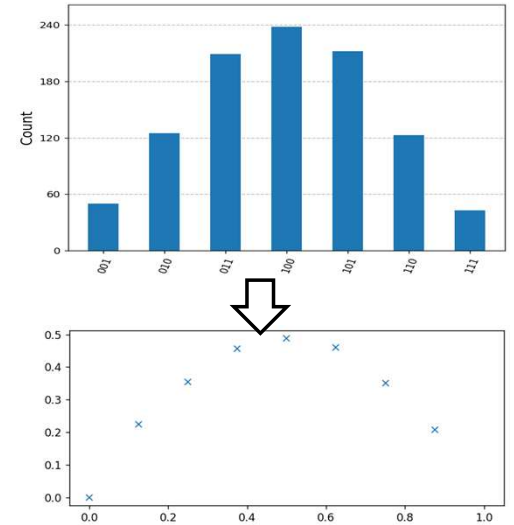


読み出しコスト S

= 量子回路の測定回数



$|j\rangle = |000\rangle, |001\rangle, \dots, |111\rangle$



- 量子計算コスト = $\mathcal{D} \times S$
- (理想)量子計算時間 = \mathcal{D}

① 非ユニタリ演算を実装するため、補助ビットを事後選択する → 読み出しコスト S が成功確率に反比例:

$$S = O(1/P_{\text{suc}})$$

② 関数を読み出しする際に、ビンごとに一回以上測定されないといけない



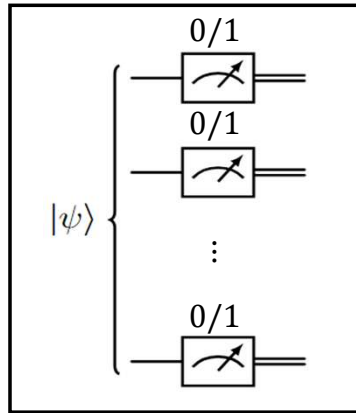
従来の読み出しコスト: $S = O(N) \rightarrow O(1)$



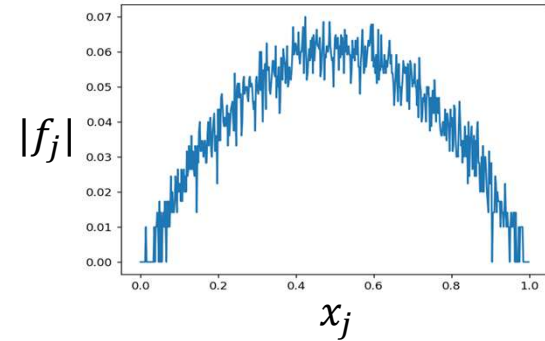
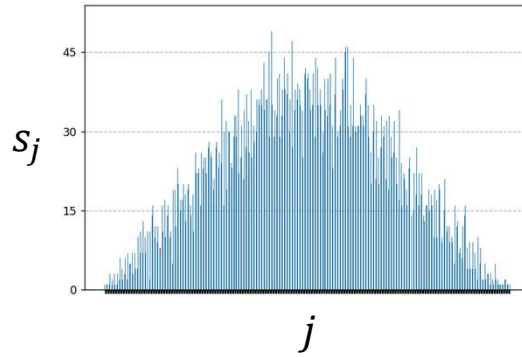
arXiv:2507.20599

フーリエ空間読み出し手法

実空間サンプリング RSR (従来法)

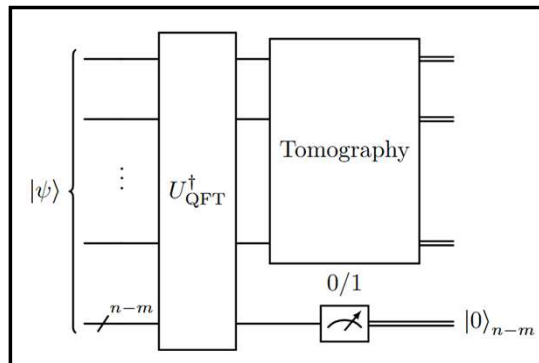


$\times S$

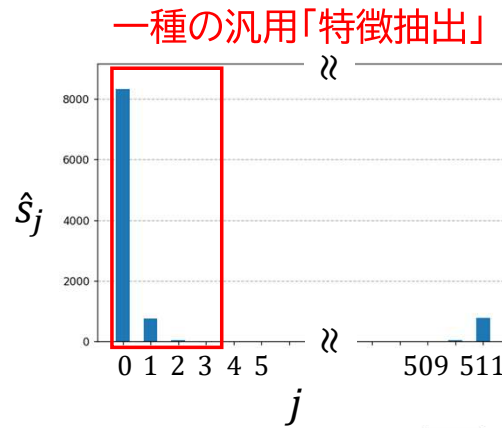


$$|f_j| = \sqrt{s_j/S}$$

フーリエ空間サンプリング FSR (提案手法)

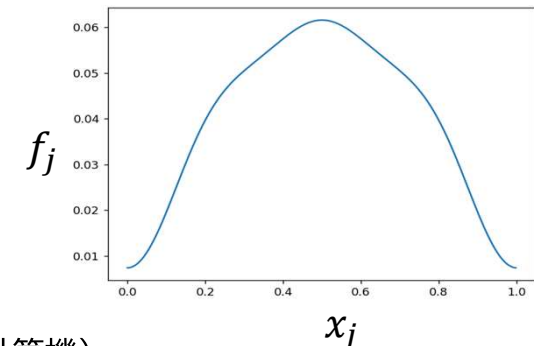


$\times S$



+ phases $\theta_j \Rightarrow c_j \approx e^{i\theta_j} \sqrt{\hat{s}_j/S}$

パラメータ M が S によって動的に決まる

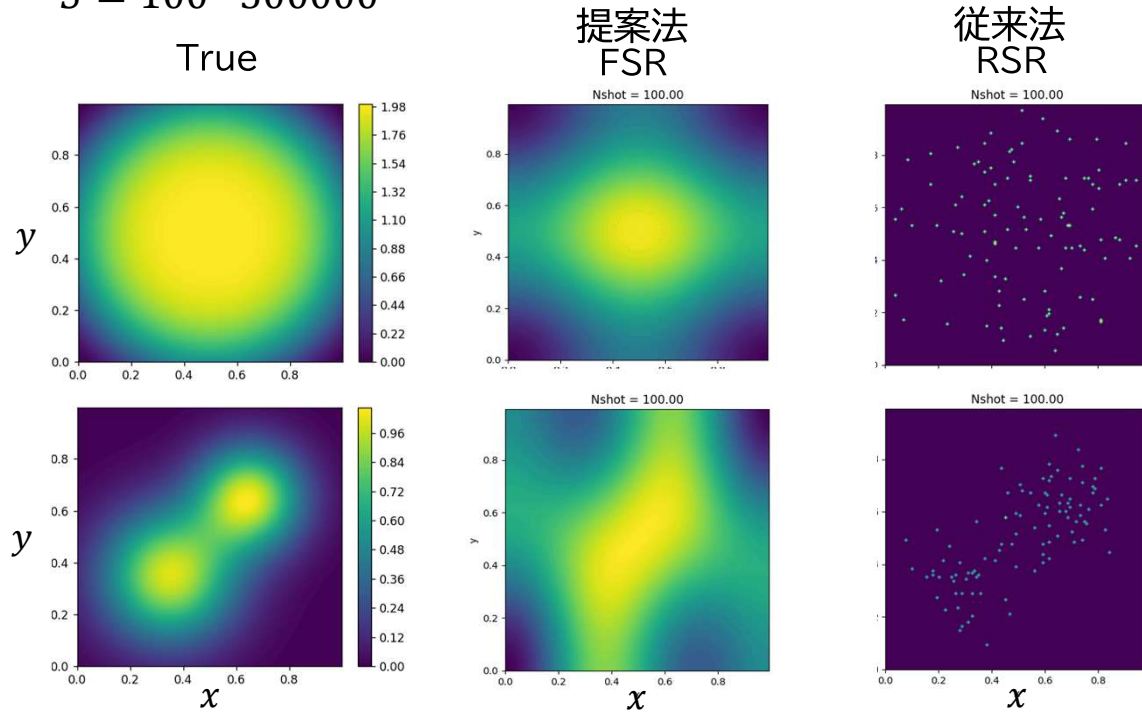


(古典計算機)
標的点だけ
解を再構築

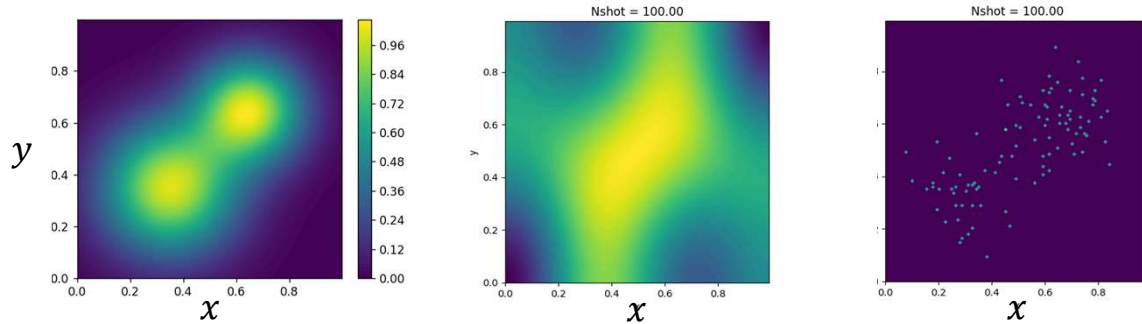
$$f_j \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \left(c_0 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \mathcal{R} \left(c_k \exp \left(i \frac{2\pi}{N} k j \right) \right) \right)$$

$N = 128 \times 128 = 2^{14} = 16384$ $S = 100 \sim 500000$

例1: 二次元三角関数

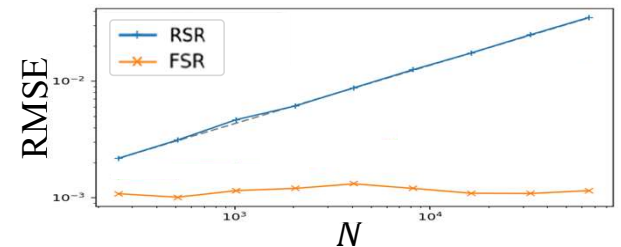


例2: ガウス関数の線形和



なぜ従来法より良い

- グリッド点全部の値ではなく、解の関数を再構築するための情報のみを取得
- その情報量(ここで支配的なフーリエ係数の数)は N に非依存





arXiv:2511.20017

実空間とフーリエ空間の読み出し手法の比較

複数の情報を一気に取得(サンプリング系)

情報を一個ずつ取得(重なり計算系・QAE系)

<p>実空間</p>	<p>RSR(従来法) → ARSR(提案2) = 特殊な事後処理</p>	<p>fQFSR(提案1.5) フーリエ空間経由で 標的点の振幅を増幅</p> <p>RSQAE(QAEの適用) [Manzano 2023] QAAで 標的点の振幅を増幅</p>
<p>フーリエ空間 = フーリエ基底</p>	<p>FSR(提案1)</p>	<p>FSQAE(提案3, FS+QAE) QAAでフーリエ係数の振幅を増幅</p>
<p>他の関数基底</p> <p>※ 先行研究は、古典計算機における最適化に基づくもので、 (基底の数に対する)スケーリングが比較的悪い</p>		<p>直交関数基底[Miyamoto 2023] 各直交基底のMPS化+係数を最適化するための重なりを取得</p> <p>非直交Lorentzian関数基底[Nishi 2025] 基底の効率良い構成+最適化するための重なりを取得</p>

- 「基底の完全性(=表現力)」、(有効性)、「基底の量子回路化」+「基底係数の局在化」(効率性)を総合的に考慮したら、フーリエ基底が一つの良い候補
- サンプリング系のコストの前因子は比較的小さい。一方、量子振幅増幅(QAA)と組み合わせ難い

複数の情報を一気に取得(サンプリング系)

情報を一個ずつ取得(重なり計算系・QAE系)

<p>実空間</p>	<p>RSR(従来法) → ARSR(提案2) = 特殊な事後処理</p>	<p>fQFSR(提案1.5) フーリエ空間経由で 標的点の振幅を増幅</p> <p>RSQAE(QAEの適用) [Manzano 2023] QAAで 標的点の振幅を増幅</p>
<p>フーリエ空間 = フーリエ基底</p>	<p>FSR(提案1)</p>	<p>FSQAE(提案3, FS+QAE) QAAでフーリエ係数の振幅を増幅</p>
<p>他の関数基底</p> <p>※ 先行研究は、古典計算機における最適化に基づくもので、 (基底の数に対する)スケールアップが比較的悪い</p>		<p>直交関数基底 [Miyamoto 2023] 各直交基底のMPS化 + 係数を最適化するための重なりを取得</p> <p>非直交 Lorentzian 関数基底 [Nishi 2025] 基底の効率良い構成 + 最適化するための重なりを取得</p>

- 「基底の完全性 (= 表現力) (有効性)」、「基底の量子回路化」+ 「基底係数の局在化」(効率性)を総合的に考慮したら、フーリエ基底が一つの良い候補
- サンプリング系のコストの前因子は比較的小さい。一方、量子振幅増幅(QAA)と組み合わせ難い

実数値(連続)関数の読み出しの計算コスト

*提案手法の量子計算コストは、グリッド数に依らない

N : (トータル)空間グリッド数, d : 空間次元数, J : ターゲット点の数, ϵ : 誤差上限, s : 関数の滑らかさを反映するパラメータ

手法	量子計算コスト			古典計算コスト 含ターゲット点の解の再構築
	回路コストの オラクルの回路コスト基準	読み出しコスト S	オラクルの問い合わせ回数 $\sim \mathcal{D} \times S$	
RSR	$O(1)$	$O(N(1/\epsilon)^2)$	$O(N(1/\epsilon)^2)$	$O(N(1/\epsilon)^2)$
*ARSR	$O(1)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+d/2}\right)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+d/2}\right)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+d}\right) + O\left(J(1/\epsilon)^{d/2}\right)$
*FSR	$O(1)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+s}\right)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+s}\right)$	$O\left((1/\epsilon)^{2+s}\right) + O\left(J(1/\epsilon)^{ds}\right)$
*fQFSR	$O(1)$	$O\left(J(1/\epsilon)^{2+s}\right)$	$O\left(J(1/\epsilon)^{2+s}\right)$	$O\left(J(1/\epsilon)^{2+s}\right)$
RSQAE	$O(\sqrt{N}/\epsilon)$	$\tilde{O}\left(J \log(1/\epsilon)\right)$	$\tilde{O}\left(J\sqrt{N}/\epsilon\right)$	$\tilde{O}\left(J \log(1/\epsilon)\right)$
*FSQAE	$O\left((1/\epsilon)^{1+ds/2}\right)$	$\tilde{O}\left((1/\epsilon)^{ds}\right)$	$\tilde{O}\left((1/\epsilon)^{1+3ds/2}\right)$	$\tilde{O}\left((1/\epsilon)^{ds}\right) + O\left(J(1/\epsilon)^{ds}\right)$

- フーリエ空間での読み出しは、不連続な関数の場合 $s = 2$ で、精度軸に対する挙動が悪く、それ以外の場合に実空間と比べて比較的良い

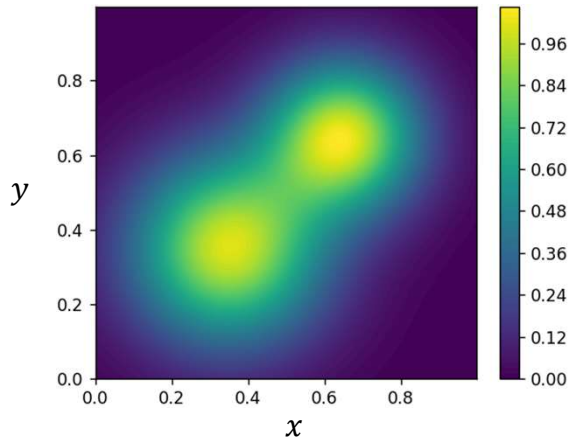
$s = 2/(2p - 1)$, $p = 2$ の例が多い

- 所要する量子実機のスペック(主に計算できる回路深さ)は、以下の順を満たす:

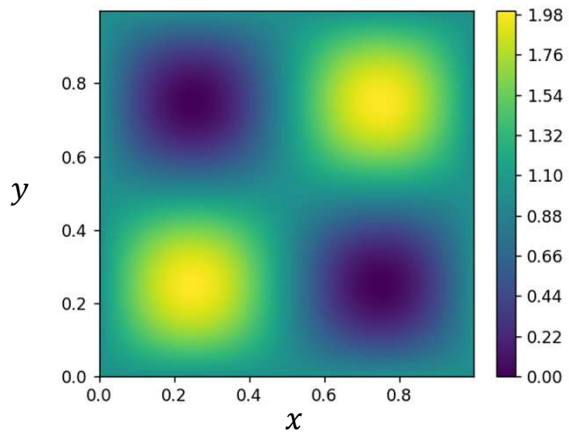
$$\text{ARSR} \approx \text{RSR} < \text{FSR} < \text{FSQAE} < \text{RSQAE}$$

$$(\text{NISQ} \rightarrow \text{eFTQC} \rightarrow \text{FTQC})$$

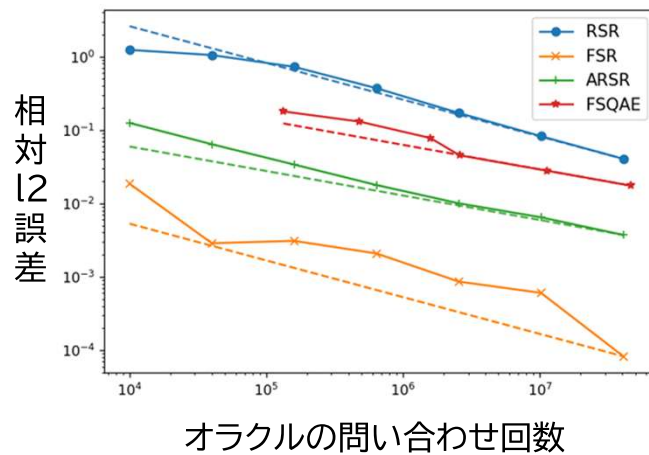
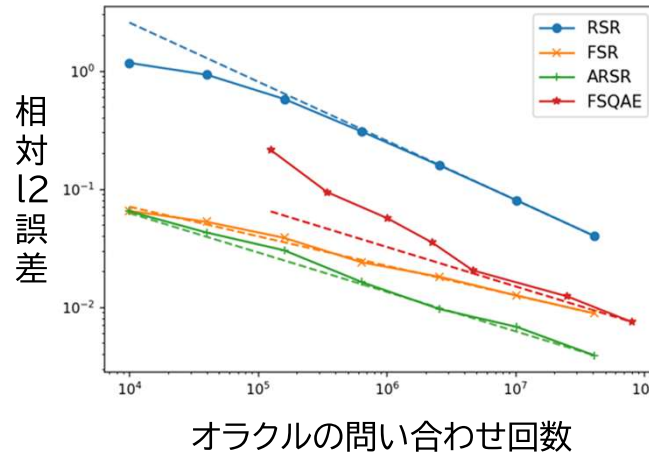
ガウス関数の線形和



三角関数(一周期)



グリッド数 $N = 512 \times 512 \approx 250000$ 、点線は手法それぞれの理論オーダー



数値オーダーと理論オーダーは概ね一致する

ガウス関数は境界で不連続性がある
→ FSRのスケールが良くない

実は、この例では、量子状態を偶関数拡張した後に、FSRを適用したら誤差への依存性が改良できる

従って、フーリエ系の手法について

- 境界不連続な場合: 偶関数拡張を行ってから読み出す
- 境界連続な場合: そのまま読み出す

eFTQCに、ARSRとFSRが良い



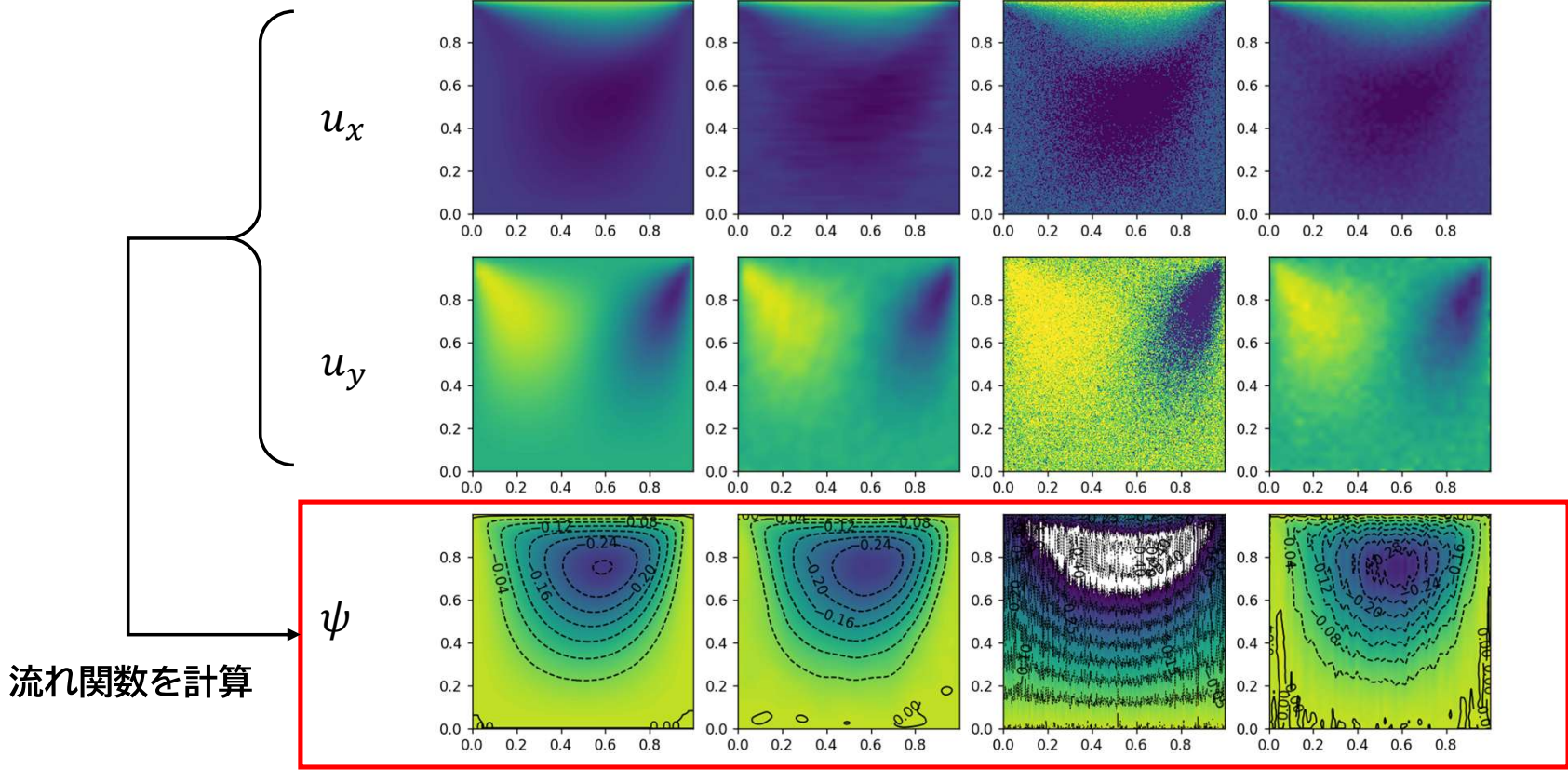
arXiv:2511.20017

CFDへの応用

例3: 蓋駆動キャビティ流れ(速度場の読み出し)

$N = 512 \times 512 = 2^{18} \approx 250000$ $S = 160000$

グリッド数より少ない読み出しコストでも、提案手法が良好な結果を示す

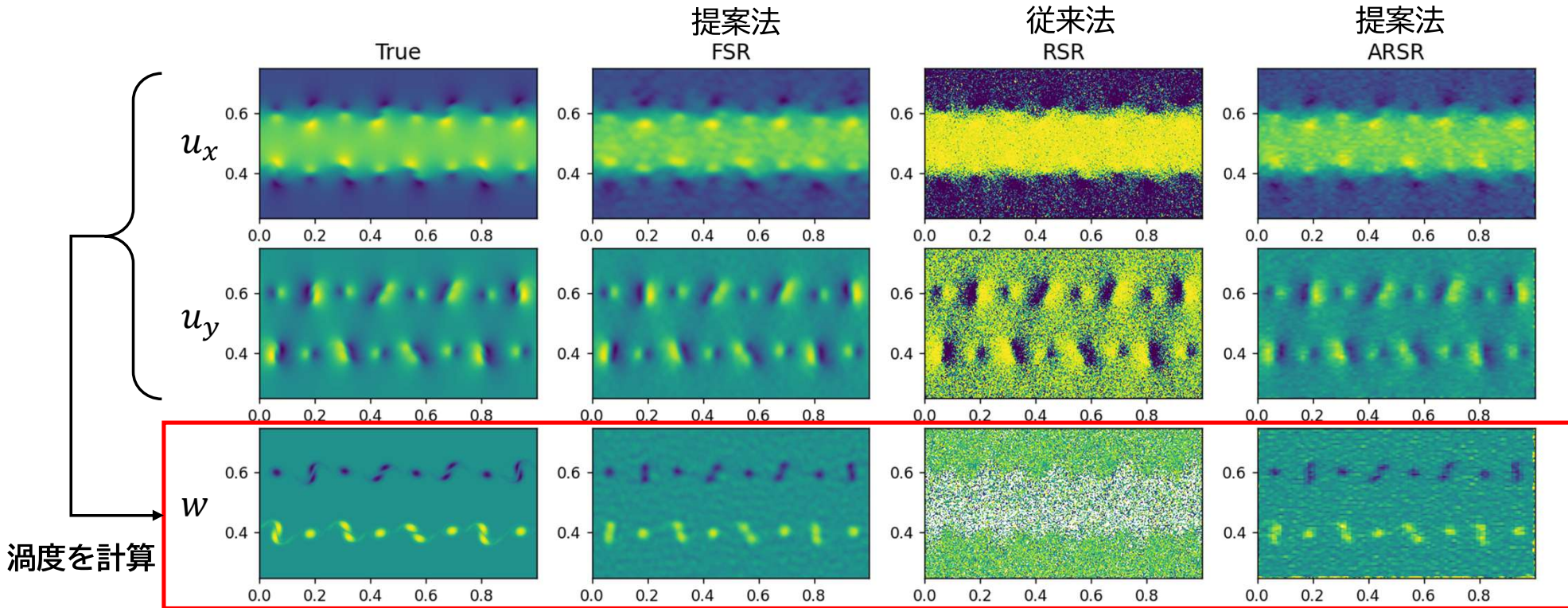


流れ関数を計算

例4: 平面噴流*(速度場の読み出し)

$$N = 1024 \times 512 = 2^{19} \approx 500000 \quad S = 160000$$

グリッド数より少ない読み出しコストでも、提案手法が良好な結果を示す



* Function data from [Gourianov et al. 2022 Nature Computational Science 2, 30-37 (2022)]

例5: バーガス方程式

$$N = 64 \times 64 = 2^{12} = 4096 \quad S = 640000$$

読み出し誤差の影響により、RSR法を用いるシミュレーションが破綻しやすい(グリッド数が小さいとき、ARSR=RSR)

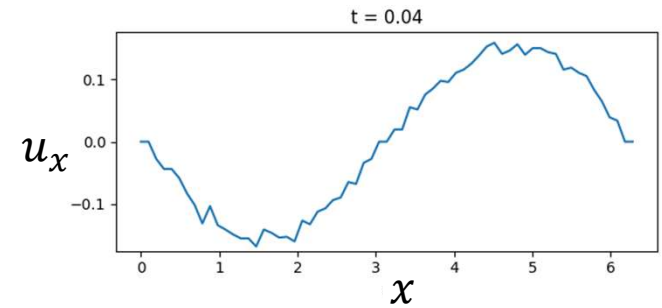
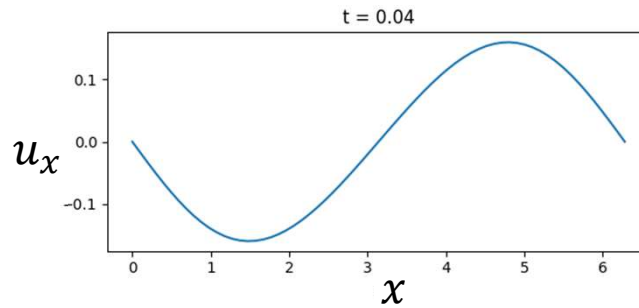
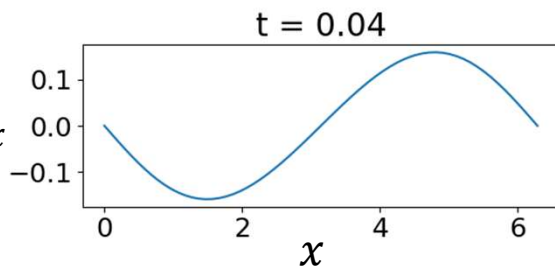
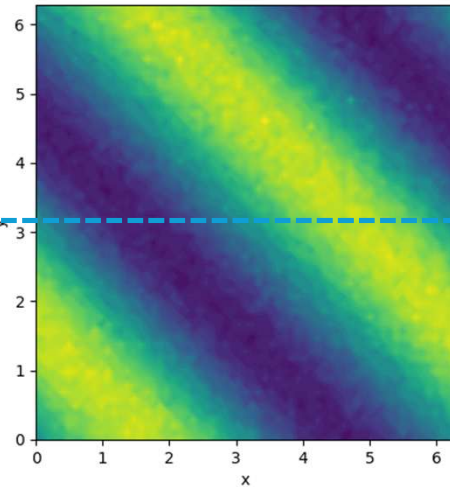
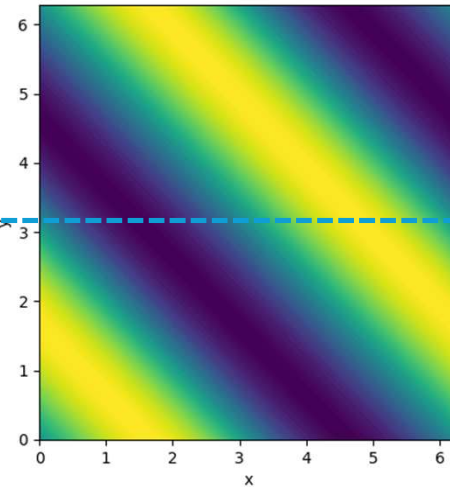
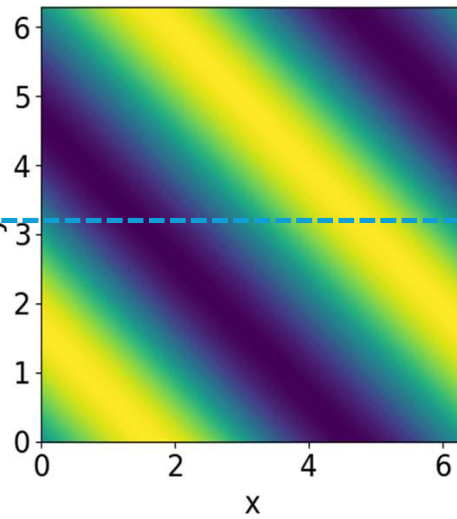
水平速度 u_x

Reference
t = 0.04

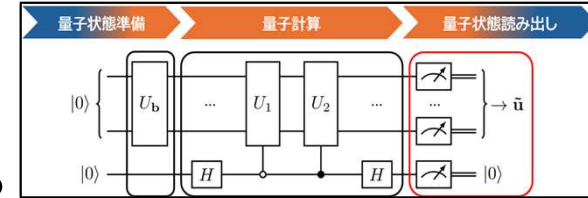
※ 誤差と成功確率を考慮し
多めのショット数が必要

提案法: FSR

従来法: RSR



- CAEにおいて大規模行列計算により、解を求める
- 量子CAEは、特定の大規模行列計算を高速化すると期待されている
- 量子CAEに対して、三つの課題がある、特に、解の読み出しがボトルネックとされる



- 本研究では、フーリエ空間読み出し等の手法を提案し、解の読み出しコストがグリッド数に依らないことを示した
(全てのグリッド点の値ではなく、所定のグリッド点の値を再構築できる情報を取得すれば十分)
- 解の読み出しの本質的な課題は、精度への依存性にある
(高精度の読み出しがボトルネック → CAEの量子加速は計算量ではなく計算時間=回路コストにある?)
- 一部流体計算の例を用いて、提案手法の効率良さを検証し、比較を行った

ご清聴ありがとうございました

エンコーディング



arXiv:2603.03803

量子計算



arXiv:2409.18559v2

関数の読み出し



arXiv:2507.20599



arXiv:2511.20017

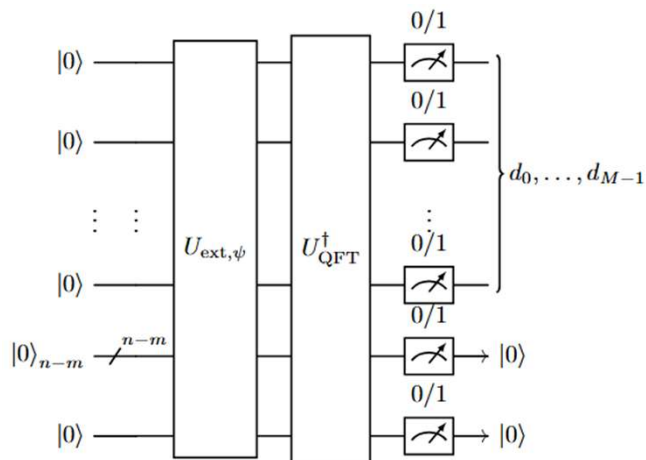


付録1:量子回路図

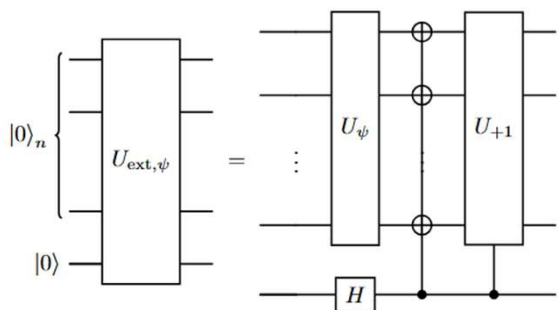
偶関数化または符号判定のための量子回路

- 偶関数化によるフーリエ係数の実数化

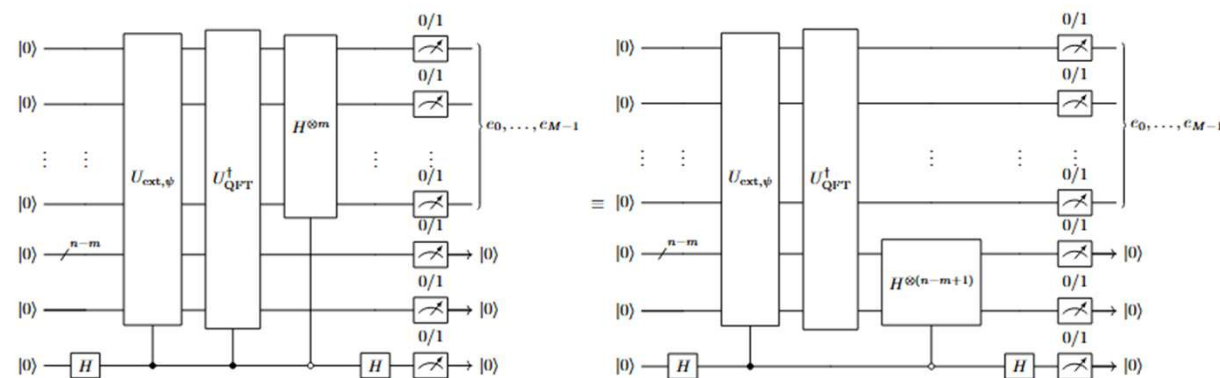
実数化したフーリエ係数の絶対値を取得する量子回路



偶関数化の量子回路



- 係数の符号を判定するための量子回路



判定の原理

参考状態 $e_j = (c_j + 1/\sqrt{M})/2$ を生成し、以下の判定関数を導入:

$$g_j := 2e_j - d_j - 1/\sqrt{M} \quad c_{min} := \min |c_j|$$

次の式から、符号が正の場合はゼロ、符号が負の場合は $\leq -c_{min} < 0$

$$g_k = \begin{cases} 0, & \tilde{c}_k \geq 0, \\ 2\tilde{c}_k < 0, & -1/\sqrt{M} < \tilde{c}_k < 0, \\ -2/\sqrt{M}, & \tilde{c}_k \leq -1/\sqrt{M}. \end{cases}$$

確率的誤差を考慮し、小さい $\delta \sim 1/\sqrt{N_{shot}}$ を導入し、以下の近似をとる:

$$\tilde{c}_k \approx \text{sgn}(g_k + \delta)d_k, \quad k = 0, \dots, M - 1.$$

- 実部と虚部の絶対値を同時に取得

- 実部と虚部の係数の符号を一気に判定

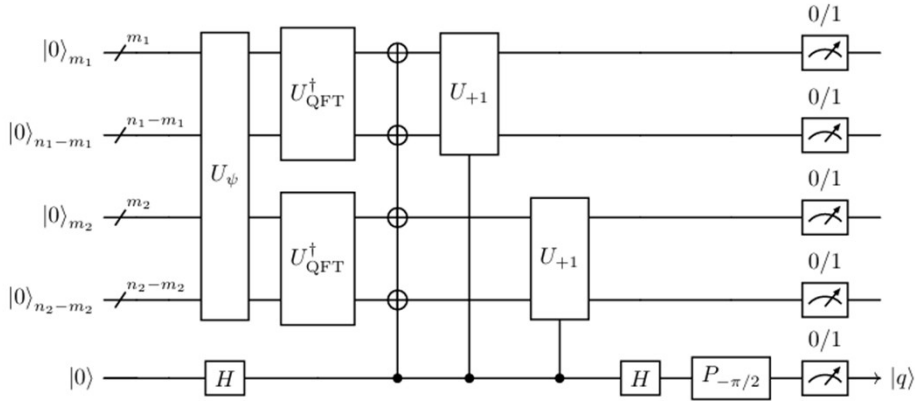


Figure 12: Quantum circuit for determining the absolute values of the Fourier coefficients in the FSR2 method for a 2D case. By post-selecting the last qubit as $|q\rangle$, we obtain the absolute values of the real parts if $q = 0$ and the absolute values of the imaginary parts if $q = 1$.

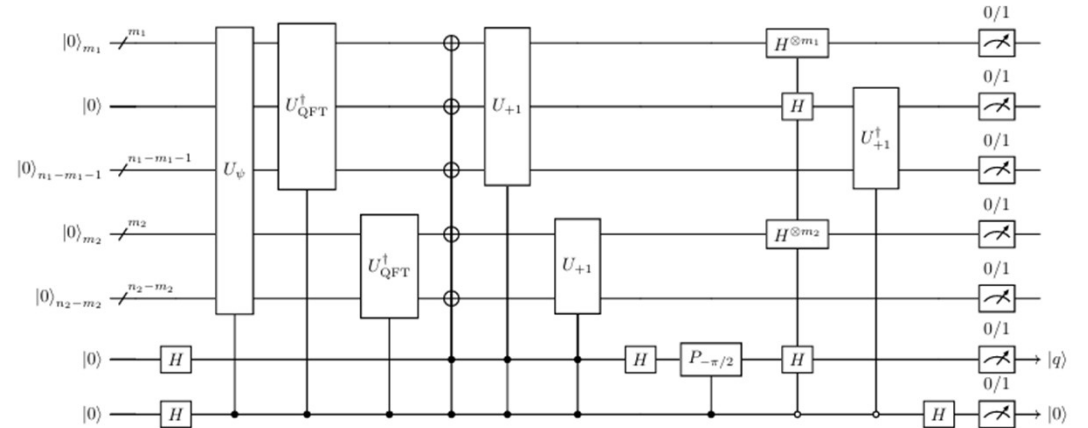


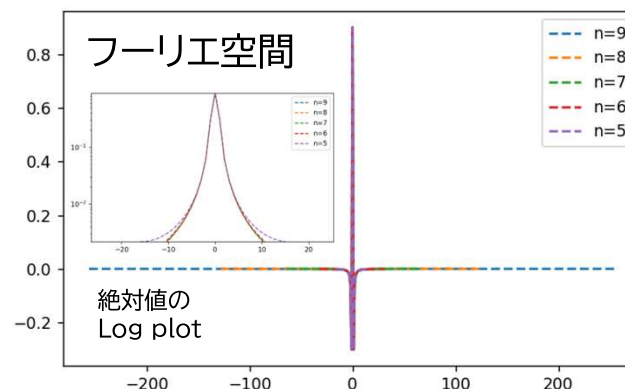
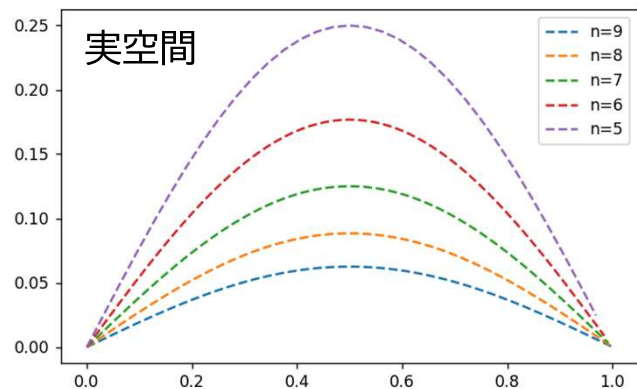
Figure 13: Quantum circuit for determining the signs of the Fourier coefficients in the FSR2 method for a 2D case. By post-selecting the last qubit as $|0\rangle$ and the second last qubit as $|q\rangle$, we obtain $e_{j_1, j_2}^{\text{re}} \approx \frac{1}{2} |\text{Re}(c_{j_1, j_2}) + 1/\sqrt{4M_1 M_2}|$ while $q = 0$ and $e_{j_1, j_2}^{\text{im}} \approx \frac{1}{2} |\text{Im}(c_{j_1, j_2}) + 1/\sqrt{4M_1 M_2}|$ while $q = 1$ for $j_1 = 0, \dots, M_1 - 1, N_1 - M_1, \dots, N_1 - 1, j_2 = 0, \dots, M_2 - 1$.



付録2:理論評価

フーリエ変換による状態の局在化

- フーリエ係数は関数の特徴量と見なしても良く、スケーリング不変性をもつ。



- フーリエ係数の減衰

Lemma 1. Let f be a piecewise $W^{1,1}$ function on $[0, L]$, that is, there exists $S \in \mathbb{N}$ and a partition $\Pi: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_S = L$ such that $f(x) = f_s(x)$, $x \in I_s := (y_{s-1}, y_s)$ for $s = 1, \dots, S$ and $f_s \in W^{1,1}(I_s)$. Then, the Fourier coefficients satisfy

$$|c_{k,c}| \leq \frac{V_{\Pi}(f) + \|f^{(1)}\|_{\Pi}}{2\pi k} = O(k^{-1}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $V_{\Pi}(f)$ and $\|f^{(1)}\|_{\Pi}$ are given in the proof. Moreover, let $f^{(q)}$ be the q -th weak derivative of f and assume $f \in W^{p,1}(0, L)$ and $f^{(q)}(0) = f^{(q)}(L)$, $q = 0, \dots, p_0 - 2$ for some integers $p \geq p_0 \geq 1$. In the case of $p_0 = 1$, this indicates no boundary assumptions. Then, the Fourier coefficients satisfy

$$|c_{k,c}| \leq \frac{1}{L} \sum_{q=p_0-1}^{p-1} \left(\frac{L}{2\pi k}\right)^{q+1} |f^{(q)}(L) - f^{(q)}(0)| + \frac{1}{L} \left(\frac{L}{2\pi k}\right)^p \|f^{(p)}\|_{L^1(0,L)} = O(k^{-p_0}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 区分絶対連続な関数であれば、 $O(k^{-1})$
- p 回微分有界且つ $p - 2$ 回微分までは境界をまたいで連続する場合、 $O(k^{-p})$
- 更に、 $p - 1$ 回微分が(境界を含めて)不連続な場合に、上のオーダーがシャープ。
- 特に、滑らかで境界の微分が不連続な関数の場合に、 $\Theta(k^{-2})$

手法	量子計算コスト		古典計算部分のコスト (含ターゲット点の解の再構築)
	回路コスト	読み出しコスト	
RSR	$O(\text{polylog}N)$	$O(N(1/\varepsilon)^2)$	$O(N(1/\varepsilon)^2)$
FSR	$O(\text{polylog}N)$	$O((1/\varepsilon)^{2+s})$	$O((1/\varepsilon)^{2+s}) + O(J(1/\varepsilon)^s)$

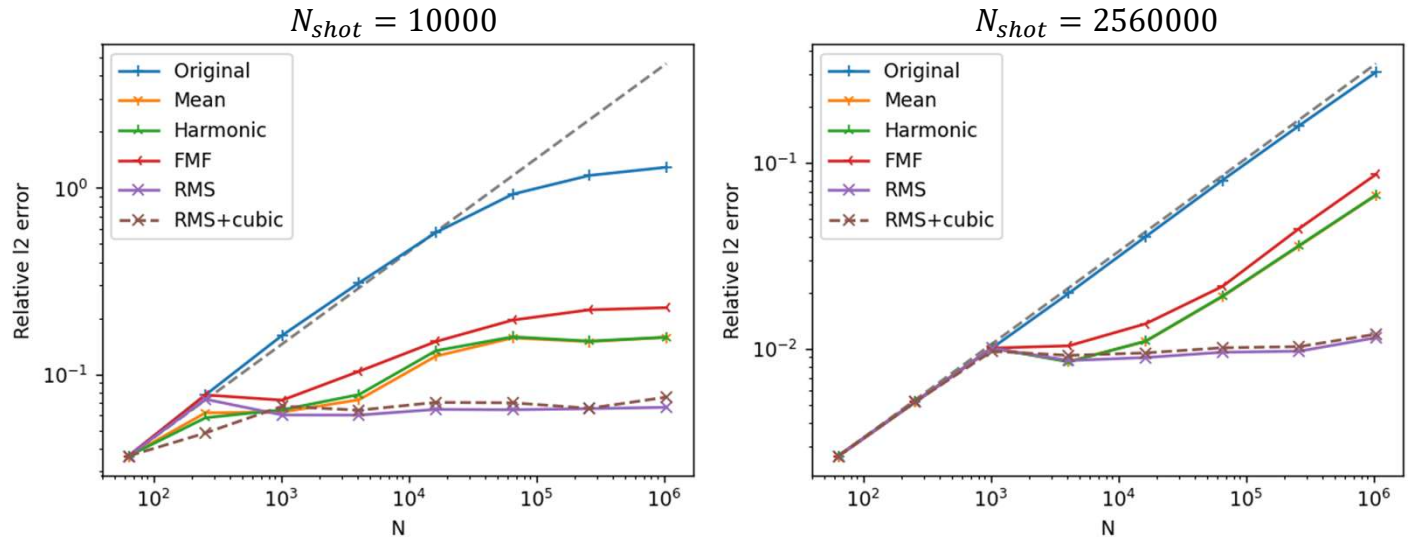
N : 空間グリッド数 J : ターゲット点の数 ε : 誤差上限 s : 関数の滑らかさに依る実数、基本的に $0 < s \leq 2/3$

Table 1: Quantum and classical complexities for the real space and Fourier space methods.

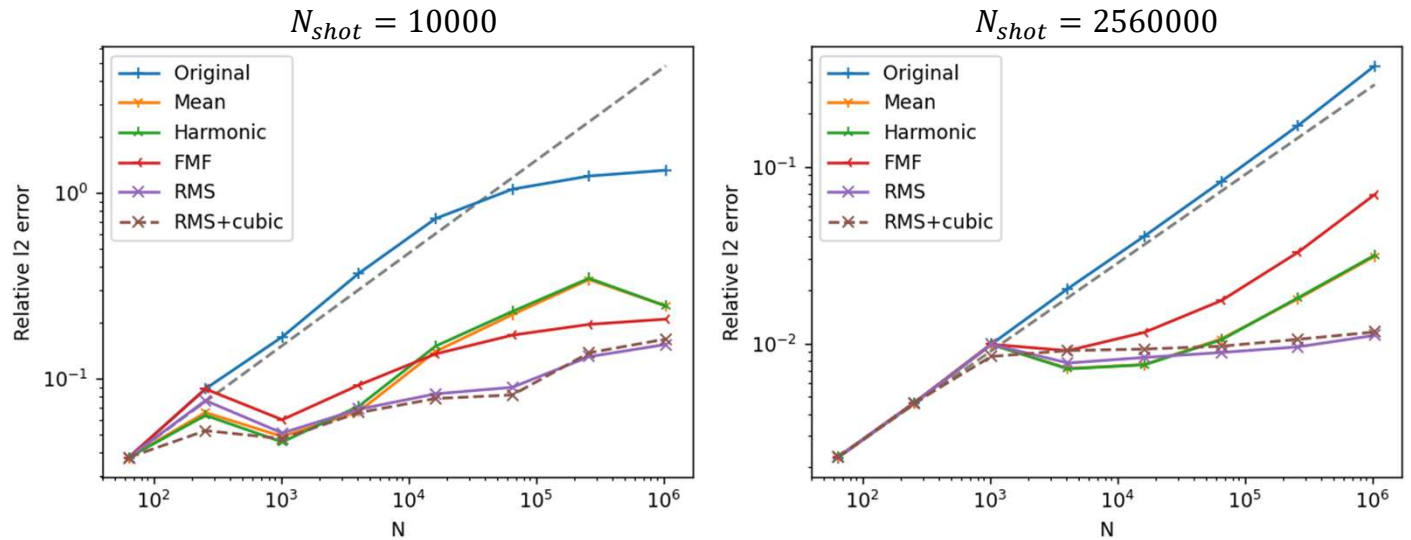
Method	Maximal circuit depth	Quantum complexity	Classical complexity
RSR ^[1]	$O(\mathcal{C}_\psi)$	$O(\mathcal{C}_\psi N(1/\varepsilon)^2)$	$O(N(1/\varepsilon)^2)$
ARSR ^[1]	$O(\mathcal{C}_\psi)$	$O(\mathcal{C}_\psi (1/\varepsilon)^{2+d/2})$	$O((1/\varepsilon)^{2+d/2}) + O(J(1/\varepsilon)^{d/2})$
FSR	$O(\mathcal{C}_\psi + \text{polylog}N)$	$\tilde{O}((\mathcal{C}_\psi + \text{polylog}N)(1/\varepsilon)^{2+s})$	$\tilde{O}((1/\varepsilon)^{2+s}) + O(J(1/\varepsilon)^{ds})$
RSQAE	$O(\mathcal{C}_\psi \sqrt{N}/\varepsilon)$	$\tilde{O}(\mathcal{C}_\psi J \sqrt{N}(1/\varepsilon))$	$O(J \text{polylog}(\sqrt{N}/\varepsilon))$
FSQAE	$O((\mathcal{C}_\psi + \text{polylog}N)/\varepsilon^{1+ds/2})$	$\tilde{O}((\mathcal{C}_\psi + \text{polylog}N)(1/\varepsilon)^{1+3ds/2})$	$\tilde{O}((1/\varepsilon)^{ds}) + O(J(1/\varepsilon)^{ds})$

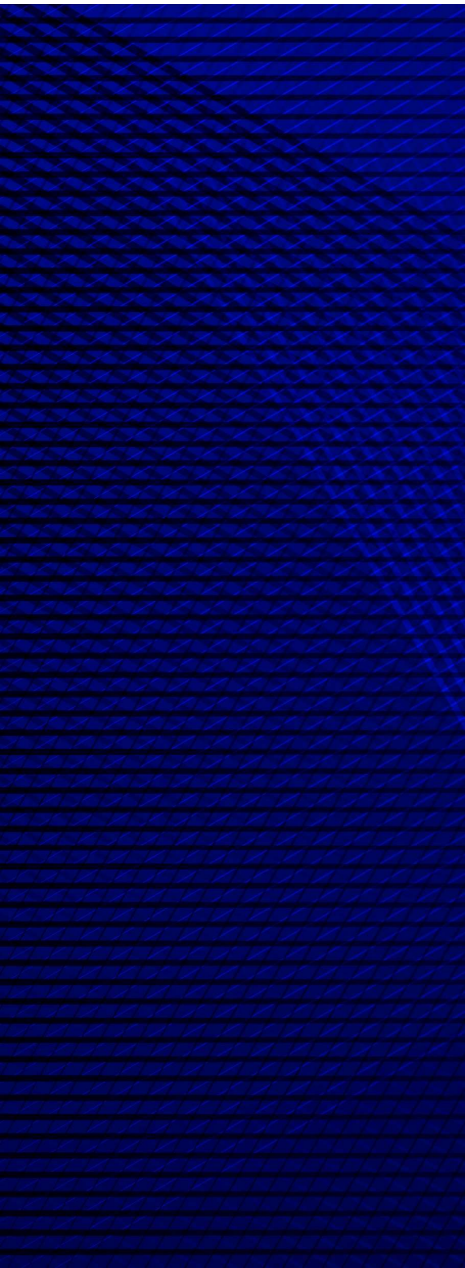
[1] The complexity is obtained under the assumption that the function has a fixed sign. Moreover, we assume that f is smooth enough and satisfies $\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0) = 0$ if $f(\mathbf{x}_0) = 0$ for the ARSR method. Without such assumptions, the order of the ARSR method can be $O((1/\varepsilon)^{2+d})$ in general.

例2: ガウス関数の線形和



例1': 二次元三角関数(周期分)

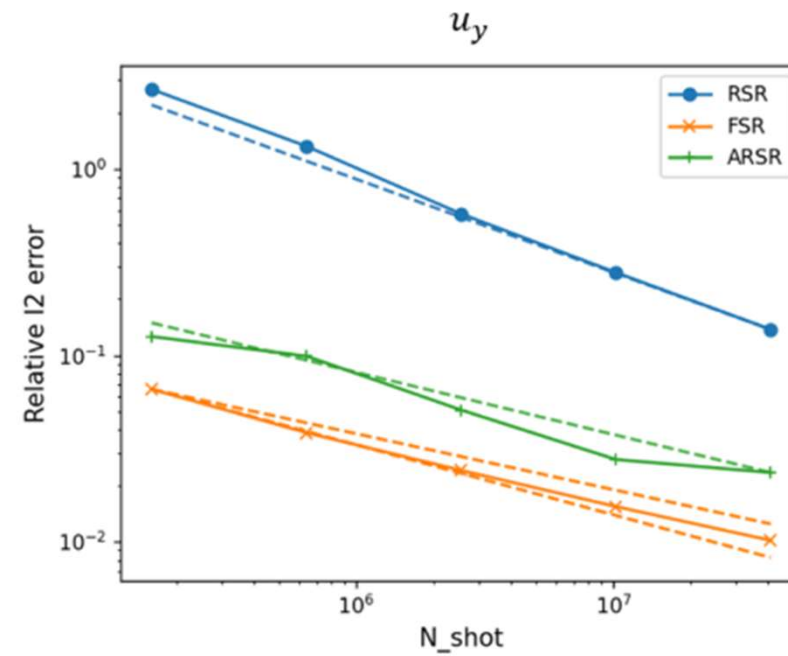
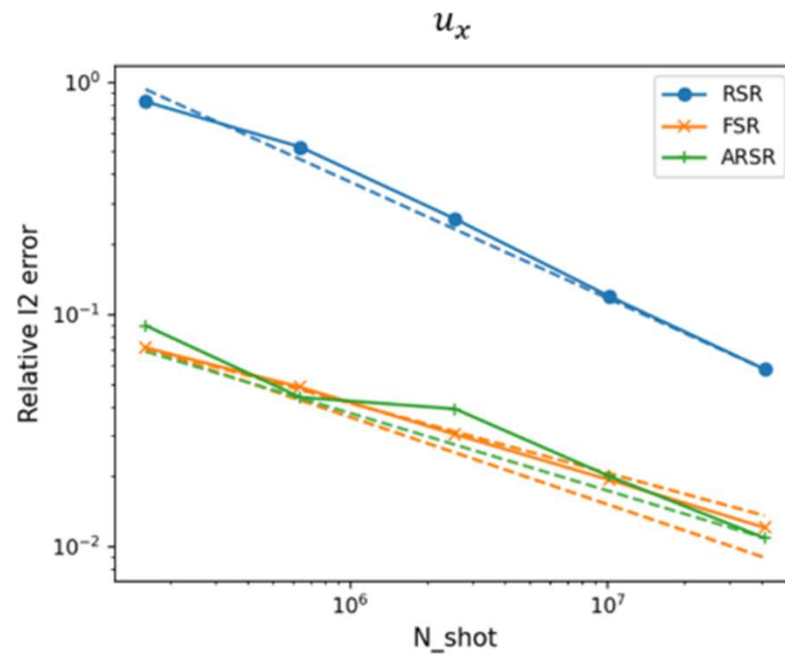




付録3:CFD応用例における減衰オーダー

例3: 蓋駆動キャビティ流れ(速度場の読み出し)

$$N = 512 \times 512 = 2^{18}$$



例4: 平面噴流(速度場の読み出し)

$$N = 1024 \times 512 = 2^{19}$$

